M-TEST

pro studenty nepovinné

M-TEST - FORMULACE

Nechť pro funkční řadu $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ a interval I existují čísla c_k pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že platí:

1) $(\forall x \in I)(|b_k(x)| \leq c_k)$

2) řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konverguje

Pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ konverguje stejnoměrně na I.

Tj. $$\sum_{k=0}^{n} b_k(x) \rightrightarrows \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) \quad (\text{pro } n \to \infty) \text{ na } I$$

M-TEST - DŮKAZ (strana 1)

Z konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ a 1) plyne pomocí

srovnávacího kritéria absolutní bodová konvergence

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ na I.

Označme částečné součty $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)$

a součet $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$.

Pak pro $m > n$ je $s_m(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} b_k(x)$

a z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |b_k(x)|$$

M-TEST – DŮKAZ (strana 2)

Protože $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} |b_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(x)|$ (napravo jsme přidali nezáporné členy)

dostaneme $\displaystyle |s_m(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(x)|$

Limitním přechodem ~~do~~ pro $m \to \infty$ dostaneme

$$|s(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(x)|$$

~~Z 2)~~ Z 1) dostaneme

$$|s(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$$

Upravíme pravou stranu ——— || ——

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} c_k - \sum_{k=0}^{n} c_k$$

M-TEST – DŮKAZ (strana 3)

Z 2) plyne, že pro $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k - \sum_{k=0}^{n} c_k < \varepsilon$$

$\left(|\text{součet} - \text{částečný součet}| < \varepsilon \right)$

Odtud dostaneme

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pro } x \in I, \ n \geq n_0 .$$

Dokázali jsme tedy, že $s_n \rightrightarrows s$ na I

(n_0 je k ε společné pro $x \in I$)

M-TEST – POUŽITÍ NA MOCNINNÉ ŘADY

(SPOJITOST SOUČTU MOCNINNÉ ŘADY – strana 1)

Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ s kladným poloměrem konvergence R.

Uvažujme $\bar{x} \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a označme $c_k = |a_k| \cdot |\bar{x} - x_0|^k$.

Pak pro x, které je k x_0 blíž než $\bar{x}$, tedy pro něj platí $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, platí

$$|a_k (x-x_0)^k| \leq c_k$$

Víme, že mocninná řada absolutně konverguje pro $x = \bar{x}$, odtud plyne konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k (\bar{x} - x_0)^k|$ a odtud a z M-testu spojitost součtu mocninné řady na intervalu $I = (x_0 - |x_0 - \bar{x}|, x_0 + |x_0 - \bar{x}|)$.

M-TEST – POUŽITÍ NA MOCNINNÉ ŘADY

(SPOJITOST SOUČTU MOCNINNÉ ŘADY – strana 2)

$\bar{x}$ jsme mohli zvolit libovolně blízko x_0+R, proto jsme dokázali, že ~~mocn~~ součet mocninné řady je spojitý v každém bodě $x \in (x_0-R, x_0+R)$ a je tedy spojitý na intervalu (x_0-R, x_0+R).

M-TEST – POUŽITÍ NA MOCNINNÉ ŘADY

(DERIVACE MOCNINNÉ ŘADY ČLEN PO ČLENU – strana 1)

Označíme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$.

Chceme spočítat $f'(x)$, proto upravíme výraz $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y-x_0)^k}{x-y} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(x-x_0)^k - (y-x_0)^k\right]}{x-y} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^k - (y-x_0)^k}{x-y}$$

K další úpravě použijeme vzorec $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + B^{k-1})$

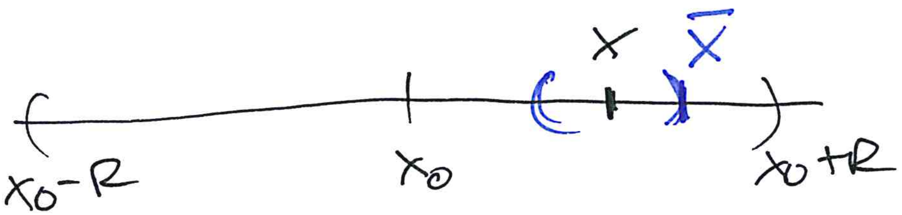
M-TEST – POUŽITÍ NA MOCNINNÉ ŘADY

(DERIVACE ŘADY ČLEN PO ČLENU – strana 2)

dostaneme

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big[(x-x_0)^{k-1} + (x-x_0)^{k-2}(y-x_0) + (x-x_0)^{k-3}(y-x_0)^2 + \dots + (y-x_0)^{k-1}\Big] \quad (*)}$$

Budeme počítat $f'(x)$, provedeme limitu $y \to x$:



Použijeme M-test s $c_k = |a_k| \cdot |\bar{x}-x_0|^{k-1} \cdot k$

Protože víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x-x_0)^k\right)'$ má také poloměr konvergence R (tj. stejný jako původní řada) – i když

(strana 3)
jsme to nedokázali -- víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konverguje.

Odtud a z M-testu plyne, že $y \mapsto (*)$ je spojitá v bodě $y = x$, tedy, že

$$\lim_{y \to x} (*) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k-1} \cdot k$$

Odtud plyne, že $\lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$

a tím končí důkaz (věty) o derivaci mocninné řady člen po členu.