BODOVÁ KONVERGENCE

Definice: Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově k funkci f na intervalu I, pokud pro všechna $x \in I$ konverguje číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ k číslu $f(x)$.

Formálně zapsáno:

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n)\underbrace{(\cancel{|f_n(x) - f(x)|})}_{|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

Značení:

$$f_n \to f \text{ na } I$$

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Definice: Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu I, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall x \in I)(\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n)(|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Značení:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } I$$

VĚTA O SPOJITOSTI LIMITY STEJNOMĚRNĚ KONVERGENTNÍ POSLOUPNOSTI

Nechť s_n jsou pro $n \in \mathbb{N}$ funkce spojité na intervalu I a nechť $s_n \rightrightarrows s$ na I.

Pak je funkce s spojitá na I.

Hlavní myšlenka důkazu:

Chceme ukázat, že s je spojitá v bodech $x_0 \in I$ (přitom v krajních bodech jen zprava či zleva).

Upravíme:

$$|s(x)-s(x_0)| \le \underbrace{|s(x)-s_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|s_n(x)-s_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|s_n(x_0)-s(x_0)|}_{<\varepsilon/3}$$

Ze stejnoměrné konvergence $\{s_n\}$ plyne: k $\varepsilon > 0$ existuje n, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k \ge n$ ~~je~~ a $x \in I$ je $|s(x)-s_n(x)| < \varepsilon/3$

s_n je spojitá v bodě x_0, proto k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $|s_n(x)-s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Odtud pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $|s(x)-s(x_0)| < \varepsilon$.

VĚTA O POLOMĚRU KONVERGENCE MOCNINNÉ ŘADY

Ke každé mocninné řadě $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ existuje číslo $R \in [0, +\infty]$ takové, že řada absolutně konverguje pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ nekonverguje pro $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.

Pokud existuje limita $\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ pro $k \to +\infty$, pak je tato limita rovna R.

VĚTY O DERIVACI ŘADY ČLEN PO ČLENU

1) Řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)(x-x_0)^k$

mají stejný poloměr konvergence R.

2) Pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)(x-x_0)^k$$