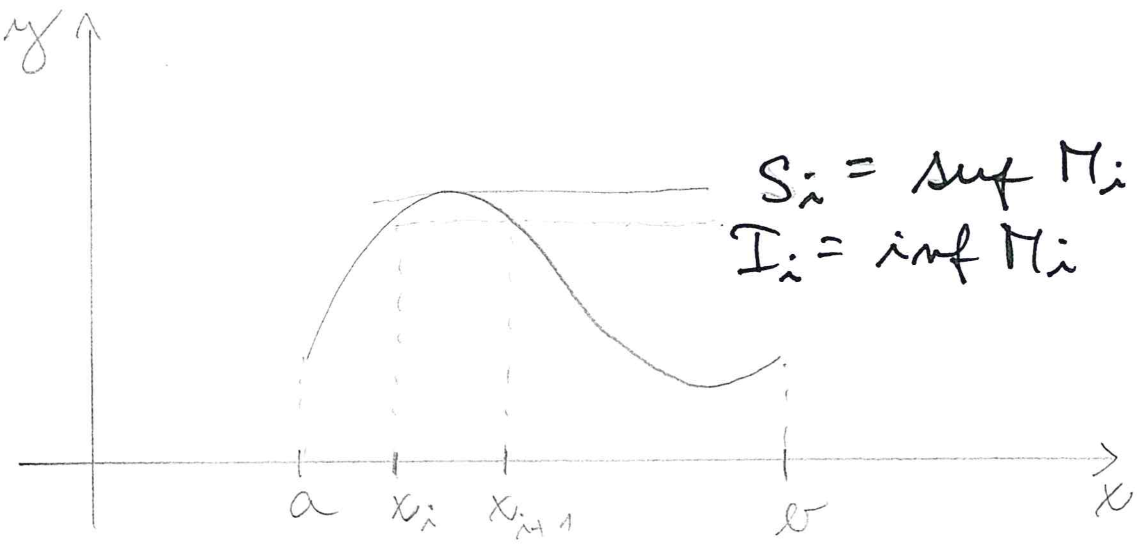
Stručné zopakování:

Riemannův integrál v 1D



$$M_i = \{ f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}] \}$$

Dolní Riemannův integrální součet

$$\sum_i I_i (x_{i+1} - x_i)$$

Horní — " —

$$\sum_i S_i (x_{i+1} - x_i)$$

Dolní Riemannův integrál

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup ? \inf$$ množiny dolních integrálních součtů

podobně Horní Riemannův integrál

Riemannovsky integrovatelná funkce

Riemannův integrál

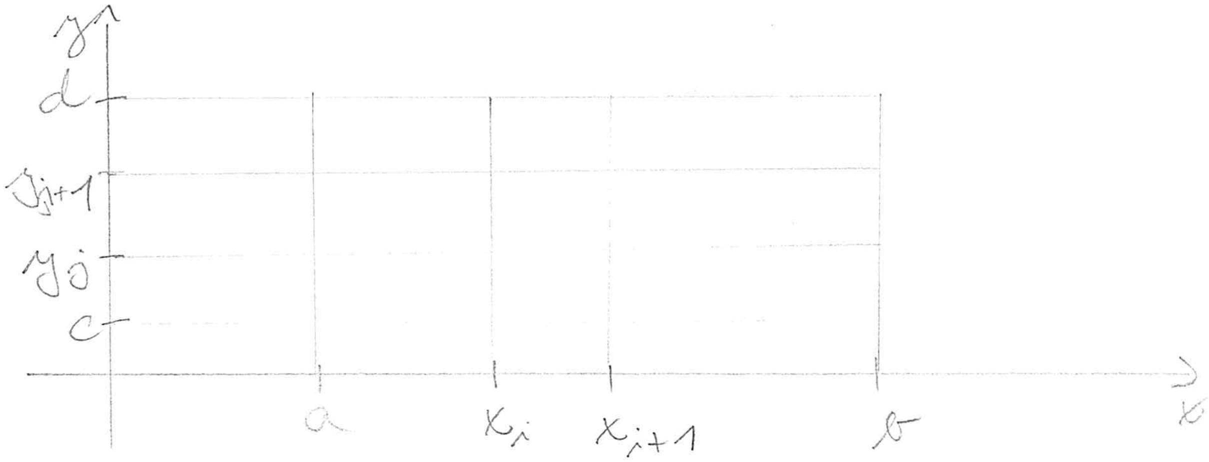
Poznámka:

Víme, že pro funkci f spojitou na $[a,b]$ je

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx$$

Tedy: vypočteme Newtonův integrál a získali jsme hodnotu Riemannova integrálu

Riemannův integrál ve 2D přes interval (= obdélník)



$$M_{i,j} = \{ \underset{f(x,y)}{\cancel{[x,y] \in \mathbb{R}^2}} : x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}] \}$$

$$S_{i,j} = \sup M_{i,j}$$

$$I_{i,j} = \inf M_{i,j}$$

~~Dolní~~ integrální součet

$$\sum_{i,j} S_{i,j} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{= \Delta x_i} \underbrace{(y_{j+1} - y_j)}_{= \Delta y_j}$$

~~Horní~~ integrální součet

$$\sum_{i,j} I_{i,j} \, \Delta x_i \, \Delta y_j$$

Dále podobně jako v 1D:

Dolní / horní Riemannův integrál

Riemannovsky integrovatelná funkce

Riemannův integrál

Riemannův integrál ve 2D nazýváme dvojným Riemannovým integrálem a značíme

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

Fubiniova věta říká, že
za určitých předpokladů
na funkci f (například spojitost
f na $[a,b]\times[c,d]$) je
budeme brát později

dvojný integrál

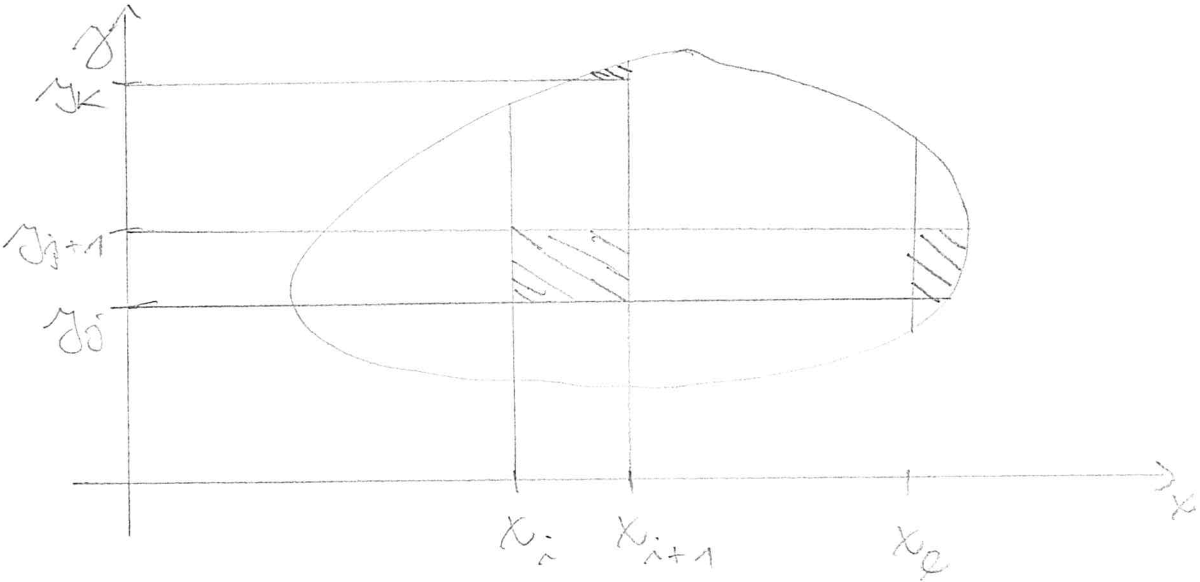
$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \cancel{f(x,y)}\, f(x,y)\,dx\,dy$$

roven dvojnásobným integrálům

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Dvojný integrál ve 2D přes obecnější množinu než je interval



Potřebujeme obsahy vyšrafovaných obrazců:

obsah intervalu $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

je roven $\sigma_{i,j} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$

obrazec vpravo: $\left([x_\ell, +\infty) \times [y_j, y_{j+1}]\right) \cap M$

jako obsah lze spočítat pomocí rovnice křivky, která ohraničuje vpravo M:

$$x = P(y)$$

$$\sigma_{\ell,j} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(P(y) - x_\ell\right) dy$$

obrazec nahoře: obdobné jako vpravo, jen ne od x_i, ale od x-ové souřadnice průsečíku

Máme-li dobře definované obsahy ~~obr~~ obrazců, přejdeme k horním / dolním integrálním součtům:

$$\sum_{i,j} S_{ij}\,\sigma_{ij}$$

$$\sum_{i,j} I_{ij}\,\sigma_{ij}$$

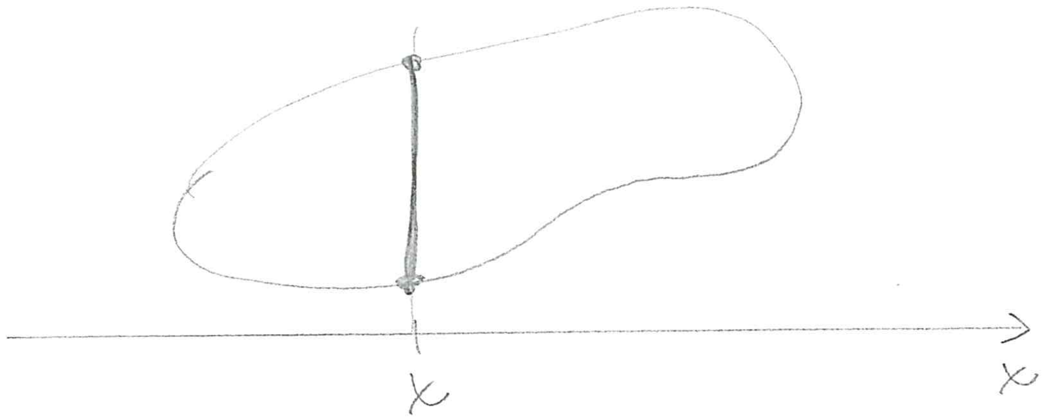
a dále stejně jako pro interval.

Dvojný Riemannův integrál funkce f přes množinu M značíme $\displaystyle\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$

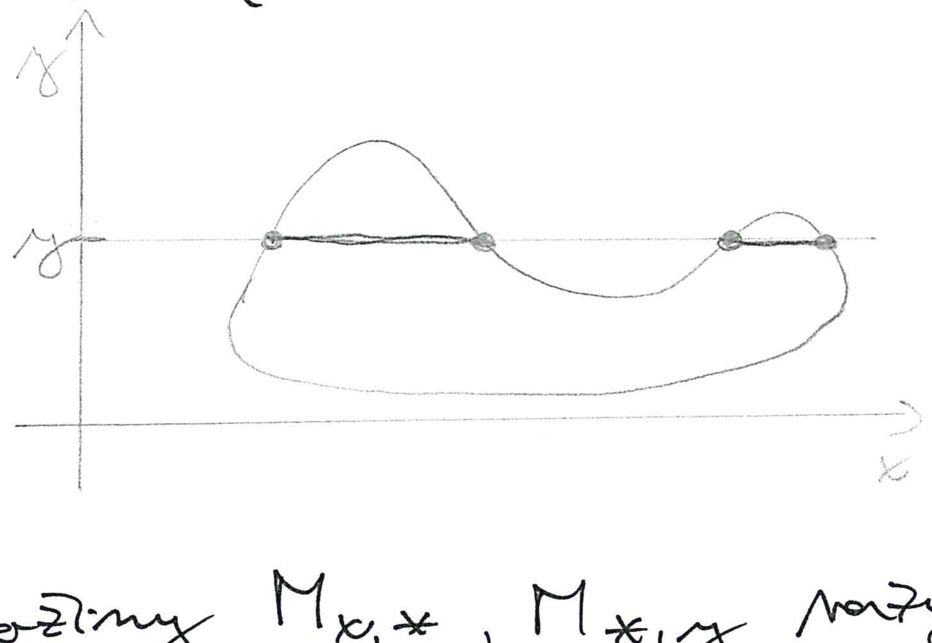
Dvojnásobný Riemannův integrál ve 2D

Pro $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$M_{x,*} = \{ y \in \mathbb{R} : [x,y] \in M \}$$



$$M_{*,y} = \{ x \in \mathbb{R} : [x,y] \in M \}$$



Množiny $M_{x,*}$, $M_{*,y}$ nazýváme řezy / vřezy množiny M.

Nákres vpisch vystihuje situaci ve 3D, kde je $M_{x,y,*} = \{z \in \mathbb{R} : [x,y,z] \in M\}$

Dvojnásobné integrály funkce f přes množinu M

$$\int_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{y \in M_{x,*}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{M_{*,y}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Není-li $M_{*,y}$ interval, např. $M_{*,y} = [0,1] \cup [3,5]$, pak je

$$\int_{M_{*,y}} f(x,y)\,dx = \int_0^1 f(x,y)\,dx + \int_3^5 f(x,y)\,dx$$

Fubiniova věta pro dvojný integrál:

Za určitých předpokladů na množinu M a funkci f – např.:

M je omezená, tj existuje $K > 0$, že

$$M \subseteq [-K, K] \times [-K, K]$$

a existují spojité funkce d, h, že

$$M = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : d(x) \le y \le h(x) \}$$

f je spojitá a omezená na M

(spojitost ve 2D teprve budeme probírat)

platí

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{M_{x,*}} f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{M_{*,y}} f(x,y)\,dx \right) dy$$