Obsah

(podobně délku, objem,

nazýváme je souhrnně míra,

případně délku nazýváme

1-rozměrnou mírou, obsah

2-rozměrnou mírou a objem 3-roz-

měrnou mírou)

je zobrazení, které množině M

přiřadí číslo $m(M)$ a

má vlastnosti (axiomy)

1) pozitivita

$$m(M) \geq 0$$

2) aditivita

jè-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, tak jè

$$m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) + m(M_2)$$

3) subaditivita

$$m(M_1 \cup M_2) \leq m(M_1) + m(M_2)$$

4) monotonie

jè-li $M_1 \subseteq M_2$, tak jè

$$m(M_1) \leq m(M_2)$$

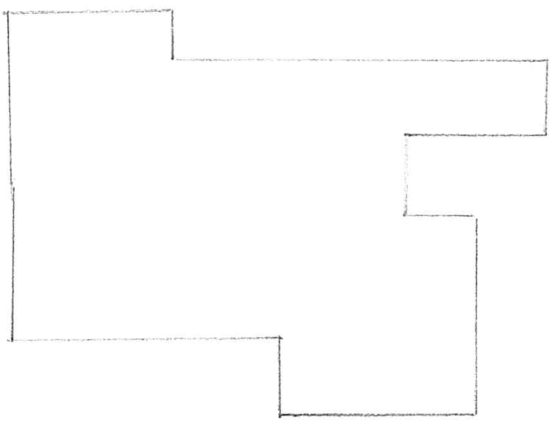
5) míra intervalu

Pro $I = [a, b] \times [c, d]$ $(a \leq b, c \leq d)$

jè $m(I) = (b-a)(d-c)$

(Speciálně lze i $a = b$, $c \leq d$,
$a \leq b$, $c = d$)

z vlastností (axiomů) 1) až 5)
lze určit míru konečného
sjednocení obdélníků ve speciální
poloze (mají strany vzájemně rovnoběžné)
např.



Tyto množiny budeme
v dalším nazývat
„speciálními obrazci".

Dalším „speciálním obrazcem" je
prázdná množina a $m(\emptyset) = 0$.

Podobně pro úsečku $U = \{a\} \times [c, d]$, $U = [a, b] \times \{c\}$
platí $m(U) = 0$

Dále z axiomů plyne,

že $m(M)$ leží v intervalu

$[m_i(M), m_o(M)]$, kde

$m_i(M) = \sup$ obsahů „speciálních obrazců", které jsou $\subseteq M$

je tzv. vnitřní míra množiny M

$m_o(M) = \inf$ — " — $\supseteq M$

je tzv. vnější míra množiny M

(analogie se mnou psané v 5. čísle ZČ)

Množinu M nazveme Jordanovsky měřitelnou, pokud platí

$$m_i(M) = m_o(M)$$

a číslo $m_i(M)$ nazýváme Jordanovou mírou množiny M a značíme $m(M)$.

Ukážeme (asi na tabuli)

1) Jednobodová množina $M = \{[a,b]\}$ je Jordanovsky měřitelná a její míra je rovna nule.

2) Konečná množina M je Jordanovsky měřitelná a její míra je rovna nule.

3) Konečné sjednocení (tj. sjednocení konečně mnoha) úseček je množina Jordanovsky měřitelná a její míra je rovna nule.

4) Spočetné sjednocení úseček $M = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times [0,1]$ má $m_i(M) = 0$, $m_o(M) = 1$, a tedy není Jordanovsky měřitelná.

Bez důkazu uvedeme větu:

Množina Jordanovsky měřitelných množin je uzavřená na množinové operace průnik, sjednocení a rozdíl, tj: Jsou-li $A, B \subseteq R^2$ Jordanovsky měřitelné, pak jsou i $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ Jordanovsky měřitelné.

Na množině Jordanovsky měřitelných množin splňuje Jordanova míra vlastnosti 1) až 5) (tedy je pozitivní, aditivní, subaditivní, monotonní, míra intervalu je jeho obsah.

Míru m nazveme σ-aditivní, pokud pro každou posloupnost množin $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ po dvou

disjunktních, tedy

$M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$

platí

$$m\left(\bigcup_i M_i\right) = \sum_i m(M_i)$$

U σ-aditivní míry lze za „speciální obrazce" brát spočetná sjednocení intervalů a pak je každá spočetná množina měřitelná a její míra je rovna nule.

Ukážeme, že množina $(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times[0,1]$ má σ-aditivní vnější míru rovnu nule (odtud plyne její měřitelnost).