

Úlohy na dvojný integrál
12. října 2021

1. Vypočtete obsah a souřadnice těžiště trojúhelníku ABC elementárně i pomocí integrálu.

$$A = [0, 0] \quad B = [3, 1] \quad C = [1, 3]$$

2. Vypočtete integrál z funkce f přes kruh se středem v počátku a poloměrem $r = 2$. K výpočtu použijte polární souřadnice.

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

3. Co je grafem funkce z minulého příkladu?
4. Vypočtete oba dvojnásobné integrály funkce f přes čtverec $OABC$ (pozor, integrály se nerovnají).

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad O = [0, 0] \quad A = [1, 0] \quad B = [1, 1]$$

Nemáte-li chuť spočítat vnitřní integrál, tak jen ověřte následující vztahy a použijte je

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = f(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -f(x, y)$$

- 5* Vypočtete objem a souřadnice těžiště čtyřstěnu $OABC$.

$$O = [0, 0, 0] \quad A = [1, 0, 0] \quad B = [0, 1, 0] \quad C = [0, 0, 1]$$

6. Vypočtete obsah množiny M

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq x/2, y \leq 2x, xy < 1, xy > 0\}$$

- (7*) Do vytvořené sítě rovnoběžek házejte špejle a z jejich poloh odhadněte hodnotu čísla π s přesností na setiny. Z přednášky o statistice víte, kolik hodů potřebujete, abyste této přesnosti dosáhli s 95% pravděpodobností. Pokus natočte na video, výpočty buď sepište nebo je vyložte ve videu.
- (8*) Poříd'te si balíček karet a skládejte je na sebe tak, abyste se dostali vrchní kartou co nejdále od podložky (hrany stolu). Určete, jaká poloha karet vám umožní dostat se co nejdále. Pokus natočte na video, výpočty buď sepište nebo je vyložte ve videu.
- 9* Vypočtete dvojný integrál z funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ přes kruh o středu v bodě $S = [0, 1]$ a poloměru $r = 1$.

10. Hustota normovaného normálního rozdělení je dána funkcí

$$f(x) = C \exp(-x^2/2),$$

kde C je reálné číslo zvolené tak, aby $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$. Určete hodnotu C .

11. Čtverec v příkladu 4 rozdělte úhlopříčkou $y = x$ na dva trojúhelníky a vypočtete integrál přes každý trojúhelník.