Úlohy na parciální derivace a vrstevnice
19. října 2021

1. Napište definici parciální derivace funkce f podle proměnné y.

2. Pro funkci f

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$$

   (a) Vypočtěte parciální derivace v bodě $\mathbf{A} = [x_0, y_0]$.

   (b) Vypočtěte derivaci v bodě $\mathbf{A} = [x_0, y_0]$ podle vektoru $\mathbf{v} = (1,0)$ a ukažte, že se rovná parciální derivaci podle x. Obdobně pro vektor $\mathbf{v} = (0,1)$ a derivaci podle y.

   (c) Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $\mathbf{B} = [-1,1]$ podle vektoru $\mathbf{v} = (1,-2)$ a podle obecného vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

   (d) Načrtněte grafy funkcí

$$g : t \mapsto f(-1+t, 1-2t) \qquad h : t \mapsto f(-1+2t, 1-4t)$$

   *(e) Co lze z grafů z minulého cvičení vyčíst o vztahu veličin $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ a $D_{2\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$?

3. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1,-2]$

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x - xy - y^2}{x+y}$$

4. Vypočtěte derivaci funkce f podle vektoru $v = (v_x, v_y)$ v bodě $A = [0,0]$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

*5 Ukažte, že zobrazení, které vektoru v přiřadí číslo $D_v f(A)$ (pro f, A z minulé úlohy) není lineární. Speciálně: je homogenní, ale není aditivní.

6. Načrtněte vrstevnice funkce f, na jedné vrstevnici zvolte bod A, vypočtěte $\operatorname{grad} f(A)$ a umístěte jej do bodu A. Zkontrolujte polohu gradientu a vrstevnice.

$$f(x,y) = xy$$

6a

$$f(x,y) = 3x - 2y + 1$$

6b

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

6c

$$f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

*6d

$$f(x,y) = \frac{x-2y}{x^2+y^2}$$

*6e

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$