

Úlohy na spojitost, limity a derivace  
26. října 2021

1. Ukažte, že funkci  $f$  nelze spojitě rozšířit (tj. v bodě, ve kterém není definovaná nemá limitu)

$$f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + 5y^2}$$

1a

$$f(x, y) = \frac{2(x-1)^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

1b

$$f(x, y) = \frac{(x^2 - 1)y^2}{(x+1)^2 + 5y^2}$$

2. Vypočtete hodnoty limit funkce  $f$  v počátku po všech přímkách. Co odtud plyne pro limitu funkce  $f$  v počátku?

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$$

2a

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy^3}{x^6 + y^4}$$

3. Nechte WolframAlpha/GeoGebra Klasik vykreslit graf funkce  $f$  a z grafu odhadněte, zda je možné ji spojitě rozšířit na  $\mathbb{R}^2$ . Svůj odhad zkontrolujte výpočtem.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 - x)(y^2 - 4)}{x^2 + (y - 2)^2}$$

3a

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x + y - 3)(x - y + 1)}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

3b

$$f : (x, y) \mapsto \frac{y^3}{(x + 3)^2 + y^2}$$

4. Vypočtete parciální derivace funkce  $f$  v počátku (zde je třeba použít definici). Nechte WolframAlpha/GeoGebra Klasik vykreslit graf funkce  $f$  a odhadněte, zda je v bodě  $\mathbf{a} = (0, 0)$  spojitá, zda v něm má slabou derivaci a zda v něm má silnou derivaci. Případnou existenci silné derivace dokažte.

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + x)y}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

4a

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + x)y^2}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

4b

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + x)y^3}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$