TVRZENÍ 1.30 [LZ]

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$y \in f(\mathcal{U}_\delta(a)) \iff (\exists x \in \mathcal{U}_\delta(a))(y = f(x))$$

$$\Downarrow \text{ (i)}$$

$$f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(a))$$

tj. $y \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(a))$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$f^{-1}(f(\mathcal{U}_\delta(a))) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a)))$$

$$\mathcal{U}_\delta(a) \subseteq f^{-1}(f(\mathcal{U}_\delta(a)))$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

V je okolí $f(a)$ znamená:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a)) \subseteq V)$$

$$f^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a))) \subseteq f^{-1}(V)$$

(iii) $(\exists \delta > 0)(\mathcal{U}_\delta(a) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a)))$

odtud $\mathcal{U}_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$, tedy

$f^{-1}(V)$ je okolí a

(iv) $\Rightarrow$ (v)

Zvolíme $V = \mathcal{U}_\varepsilon(f(a))$ ... okolí $f(a)$

dle (iv) je $f^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a)))$ okolí a

tedy $(\exists \delta > 0)(\mathcal{U}_\delta(a) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a)))$

$x_n \to a$ ... k $\delta > 0$ $\exists K$, že:

$n > K \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}_\delta(a)$

odtud: $x_n \in f^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a)))$

$\Updownarrow$

$f(x_n) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(a))$

odtud: $f(x_n) \to f(a)$

(v) $\Rightarrow$ (i)

Heineho věta

(důkaz na cvičení)

$$f : X \to Y, \quad A \subseteq X, \quad B_1, B_2 \subseteq Y$$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

$$y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x))$$