Úlohy na první hodinu
29. září 2021

1. Načrtněte obrazec O.

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \le 3 - x^2, y \ge x + 1\}$$

2. Zvolte $c \in \mathbb{R}$ a k obrazci O načrtněte přímku p o rovnici $x = c$. Konstantu c zvolte tak, aby měla přímka s obrazcem neprázdný průnik.
   Pro jaké hodnoty $c \in \mathbb{R}$ je $O \cap p \neq \emptyset$?
   Z náčrtku odvoďte pro tato c množiny $M(c) = \{y \in \mathbb{R} : [c, y] \in O\}$ a zapište je jako interval. Např. pro $c = 0$ je $M(0) = [1, 3]$.

3* Co mají společného množiny $O \cap p$ a $M(c)$ a čím se liší?

4. Postupujte obdobně jako v úloze 2 pro přímky o rovnicích $y = c$. Zde je $M(c) = \{x \in \mathbb{R} : [x, c] \in O\}$.

5. Vypočtěte integrál

$$I(y) = \int_0^1 4x^2y + y^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x$$

   a následně integrál

$$\int_{-1}^1 I(y) \,\mathrm{d}y$$

   Nápověda: proměnnou y při integraci přes proměnnou x považujeme za konstantu a můžeme tedy použít úpravu

$$\int_0^1 4x^2y + y^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x = y \int_0^1 4x^2 \,\mathrm{d}x + y^2 \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x$$

   Poznámka: vypočetli jste tzv. dvojnásobný integrál

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 4x^2y + y^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

6. Vypočtěte dvojnásobný integrál v opačném pořadí

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 4x^2y + y^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$