TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

MATEMATIKA 1

FILIP SOUDSKÝ A MARTINA ŠIMŮNKOVÁ

Obsah

1. Čím se liší matematika od ostatních věd a proč je dobré jí rozumět

1.1. **Trocha filosofie.** Kde začíná a kde končí matematika? Matematika je součástí mnoha různých disciplín. S matematickými formulemi se setkáme jak ve fyzice, chemii, ekonomii tak v biologii, modelování společenských jevů i v architektuře. Paleta aplikací a směrů matematiky je tak široká, že vyvstává otázka, co je a co není matematika. Na tuto otázku neexistuje jednoduchá odpověď. Zkusme si například představit létajícího kovového slona. Víme, že taková věc odporuje fyzikálním zákonům. Přesto nám naše vědomí umožnilo si takovou věc představit. Na druhou stranu zkusme si představit, že $1+1=3$. Naše vědomí nám toto neumožní. Kde je tedy rozdíl mezi matematikou a fyzikou? Jedná se o to, že matematika je (pouze) jazyk umožnující nám jednodušší náhled na jinak na první pohled složité problémy. Číslo 2 je pouze jiné jméno pro $1+1$. Číselná soustava byla zvolena tak, aby člověku umožnila daná čísla co nejrychleji porovnat a provádět s nimi jednoduché operace jako násobení či dělení. Navíc trvalo poměrně dlouho, než se náš současný způsob zapisování čísel prosadil proti starším řeckým a římským číslicím, které byly z hlediska manipulace s čísly velmi nepraktické.

Navzdory tomu, že matematika je pouze jazyk, tedy jakýsi soubor axiomů a logických pravidel, která určují jak s nimi zacházet, nelze matematiku plně formalizovat. Jak ukázal slavný výsledek brněnského rodáka Kurta Gödela, každý axiomatický systém, který pokrývá elementární aritmetiku je neúplný nebo logicky nekonzistentní (obsahuje tvrzení, které lze z axiomů dokázat a zároveň lze ze stejných axiomů dokázat i jeho negaci).

Matematika je nezávislá na okolním světě, ačkoliv okolní svět nemůže matematické zákonitosti ignorovat. Matematika je proto ve všech vědách bezpečným nástrojem. Pokud dojde k nějaké nepřesnosti, můžeme si být jisti, že matematika není na vině. Matematika je naopak jedinou vědou, která je přesná absolutně. Všechny ostatní vědy jsou závislé na pozorování a měření, která jsou vždy zatížena nějakou nepřesností. Matematika naproti tomu staví na axiomech (tedy zřejmých tvrzeních), ze kterých jsou potom dokázány matematické věty. Právě nutnost důkazu odlišuje matematiku od ostatních disciplín. V těch se oproti matematice používá indukčních nástrojů. Provedu-li například v chemii sto padesát pokusů se stejným výsledkem (zanedbáme-li nepřesnosti při měření), automaticky předpokládám, že pokus bude vycházet i nadále při zachování stejných podmínek stejně. Naproti tomu v matematice, i když je například nějaká hypotéza testována v miliardách jednotlivých případů (připomeňme, že např. slavná Riemanova hypotéza už byla testována pro více než 10^{12} jednotlivých čísel), neznamená to, že je matematicky dokázána.

1.2. **Motivace a trocha historie matematiky.** Matematika slouží jako nástroj a jazyk ostatních věd. Už od dob starověku se matematika uplatňovala při řešení jednoduchých praktických úloh. Ve starověkém Egyptě či Mezopotámii se pomocí jednoduchých výpočtů ploch rozdělovala pole. Proto bylo třeba mít po ruce vzorce, podle nichž lze vypočítat obsah jednoduchých obrazců. Při stavění pyramid či chrámů bylo zase potřeba umět vyměřit pravý úhel. Málo kdo ví, že známá Pythagorova věta se v praxi používala ve starověkém Egyptě a Mezopotámii dávno předtím, než ji Pythagoras importoval do Řecka.

Proč se tedy Pythagorova věta jmenuje právě po Pythagorovi? Protože Pythagorovi žáci byli první, kdo dokázal, že tato věta skutečně platí. Právě toto byl velký předěl mezi starověkým Řeckem a dřívějšími civilizacemi. Řekové jako první zavedli v matematice dokazování vět a tím ji pevně oddělili od jiných vědeckých disciplín. Řekové se zabývali hlavně geometrií. A právě geometrii se jim podařilo formalizovat. To znamená, že zavedli tvrzení (takzvané axiomy), která považovali za zřejmá a ta nedokazovali, všechna další tvrzení v geometrii se musela dokázat odvozením z těchto axiomů. Tyto axiomy stejně jako soubor takřka veškerých poznatků starověké řecké matematiky může čtenář nalézt v slavné knize řeckého matematika Euklida Základy. Matematika tímto oddělením se od ostatních věd samozřejmě nepřišla o své aplikace v reálném světě. Jejich především geometrických poznatků se dál využívalo například při konstrukci jednoduchých mechanických strojů či v optice. Archimedes využil svoje matematické dovednosti při konstrukci parabolických zrcadel, která pak posloužila při obranné válce, kterou tehdy Syrakusy vedly proti Římu, k zapalování římských lodí. Dále pak Archimédés zkonstruoval i mnohho dalších užitečných vynálezů jako například archimédův šroub, kterým bylo možno jednoduše přečerpávat vodu a který se stal nedílnou součástí antických aquaduktů. Matematická vzdělanost se dále během starověku udržovala v Římské říši, ačkoliv o nějakém prudkém rozvoji už nemůže být řeč.

V období ranného středověku byla v Evropě matematika po pádu římské říše upozaděna. Část matematického vědění se uchovávala především v různých klášterních knihovnách, ve kterých se nacházela a případně opisovala řada starověkých spisů. Matematika se v té době ale rozvíjela především v arabském světě. Byli to právě arabští učenci, díky nimž se původní indická číselná soustava dostala do Evropy a kteří stáli u zrodu nové matematické disciplíny - algebry.

V pozdním středověku a na počátku novověku pak došlo k dalšímu rozvoji matematických vědomostí i v Evropě. Poté, co evropští matematici přijali arabské číslice došlo k dalšímu rozvoji algebry. Dále, v renesanční Francii začali matematici jako byl Blaise Pascal, či Pierre de Fermat jako první zkoumat pravidelnosti náhodných jevů a zavedli pojem pravděpodobnost. Na počátku 17. století přišel Francouz René Descartes s revoluční myšlenkou souřadného systému, který umožnil propojit geometrii s algebrou a založil tím nové odvětví matematiky - analytickou geometrii.

Matematika se dále začala zabývat popisem pohybu. V 16. století popsal rakouský matematik působící na dvoře Rudolfa II. Johanes Kepler dráhy planet. Planety kroužily okolo slunce, ale ne po kružnicích, jak se domníval jeho předchůdce Mikuláš Koperník, ale po elipsách. Zatímco Kepler sice popsal způsob pohybu, nedokázal vysvětlit proč se tomu tak děje. S tímto vysvětlením přišel až později Isaac Newton. Aby mohl tento pohyb uspokojivě popsat potřeboval nové matematické nástroje. Proto přišel s teorií fluxí, které odpovídají dnešním derivacím, které známe z diferenciálního počtu. Dále pak bylo potřeba zavést i opak fluxe tedy integrál. Díky těmto nástrojům, analytické geometrii a vzorci pro gravitační sílu mohl ve svém přelomovém díle Principia Mathematica objasnit, proč se planety pohybují po eliptických drahách.

Matematika se dále a dále rozvíjela a postupně se větvila na mnoho dalších oborů, jejichž úplný výčet by dalece přesahoval rozsah těchto skript. Připomeňme jenom, že matematika se uplatňuje v moderní kryptografii, což je disciplína, která se zabývá bezpečností komunikace. Pomocí matematiky jsou dnes navrženy moderní šifrovací standardy jako symetrické šifry DES, pokročilejší AES či asymetrická šifra RSA. Matematika se používá v kosmologii (dráhy výstupu i sestupu raketoplánů je potřeba dosti přesně propočítat, aby raketoplán neshořel v atmosféře). Matematika se dále objevuje i v moderní ekonomii v takzvané teorii her, která se zabývá volbou vhodné strategie v konfliktních situacích. Připomeňme, že hlavní hrdina filmu Čistá duše matematik John Forbes Nash dostal Nobelovu cenu za ekonomii, ačkoliv se zabýval čistě matematickou teorií her. Známý nástroj harmonické analýzy, Fourierova transformace, se používá při zpracování signálu. Moderní rádia, mobilní telefony a další komunikační prostředky by bez rychlé Fourierovy transformace nemohly fungovat. Matematické principy se pak aplikují i v algoritmech strojového učení a navrhování umělé inteligence, která pak hraje klíčovou roli ve vyhledávacích nástrojích na internetu a třídění obsahu na sociáních sítích.

1.3. **Jak přistupovat ke studiu matematiky.** Jediným způsobem, jak se lze naučit matematiku je aktivně dělat matematiku. Můžete přečíst spoustu knih, matematických skript, nakoukat spoustu videí na youtube, přesto člověk, který si sám z matematiky nezkusil na nic sám přijít, neokusil pocit bloudění neprobádaným terénem a radost z vlastního objevování, nemá šanci plně matematice porozumět. Matematika se nedá zažít zprostředkovaně, matematiku člověk musí zažít na vlastní kůži, je to pocit dobrodruha, který se s otevřenou myslí vydává do neznáma. Naproti tomu matematika nabízí univerzální shodu v již dosažených výsledcích. Nikdy se nestane, jako například ve fyzice, že by matematická věta jednou platila a poté musela být poopravena. Nezáleží na tom z jaké kultury člověk přišel, co zažil ani co ho formovalo. V matematice existuje jen jedna pravda, na které se všichni matematici jednoznačně shodnou (právě díky tomu, že každá věta musí mít srozumitelný důkaz). Žádná jiná disciplína se nemůže něčím podobným pochlubit.

2. Matematická logika, důkazové techniky a uspořádané množiny

Abychom mohli vybudovat teorii matematické analýzy, budeme potřebovat umět používat matematický jazyk, kterým je matematická logika. Pojďme si připomenout základní pojmy teorie množin a matematické logiky, které už jistě mnozí z Vás znají. Zároveň si na jednoduchých příkladech ukážeme, co budeme považovat za matematický důkaz.

2.0.1. *Množiny a základní množinové operace.* Množiny jsou pro matematiky soubory, jež jsou většinou popsány pomocí nějakých vlastností. Abychom se vyhnuli složitým konstrukcím matematické logiky a teorie množin budeme považovat za známou (bez dalšího vysvětlování) množinu přirozených čísel

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

a celých čísel

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Více sofistikované množiny popíšeme pomocí nějaké vlastnosti v

$$S := \{x : v(x)\}.$$

Například množinu rac. čísel jako

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dále budeme považovat za známou množinu $\mathbb{R}$ reálných čísel. Dále budeme považovat za známé operace s množinami $A \cup B$, $A \cap B$ a $A \setminus B$. Občas se objeví i operace méně známé, jako např. symetrický rozdíl množin. Jedná se tedy o prvky ležící v právě jedné z množin A, B, formálně to můžeme zapsat předpisem

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Kartézský součin množin definujeme předpisem

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

2.1. **Značení.** Abychom si zjednodušili zápis, budeme v dalším textu používat některé značky, které zápis značně zkrátí. Předně budeme používat symbol sumy. Zápis

$$\sum_{i=k}^{m} a_i = a_k + a_{k+1} + \dots + a_m$$

budeme používat pro součty členů indexovaných celými čísly. Pokud budeme sčítat přes jinou indexovou množinu, označme ji např. F, použijeme

$$\sum_{i \in F} a_i.$$

Je- li množina F konečná, je poměrně zřejmé, co danou sumou myslíme. Občas se vyskytne i nekonečná suma. V takovém případě bude ale $F = \mathbb{N}$ a tady si budeme muset vypomoci pojmem z matematické analýzy–limitou. Položíme

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_i := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right).$$

Podobně jako suma fungovala pro součet, máme i speciální zkratku pro součin

$$\prod_{i=k}^{m} a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_m$$

a

$$\prod_{i \in F} a_i.$$

Podobně pro množiny $(A_i)_{i \in F}$ definujeme symboly

$$\bigcup_{i \in F} A_i, \quad \bigcap_{i \in F} A_i.$$

Pokud bychom chtěli výše uvedené operace popsat jazykem predikátové logiky, mohli bychom to udělat následovně

$$\bigcup_{i\in F} A_i := \{x|\exists j \in F : x \in A_j\}$$

a

$$\bigcap_{i\in F} A_i := \{x|\forall j \in F : x \in A_j\}.$$

Dále pro reálné x budeme definovat *dolní celou část* x jako

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z}|z \leqslant x\}$$

(největší celé číslo které je menší nebo rovné x) a obdobně *horní celou část* x jako

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z}|z \geqslant x\}$$

(nejmenší celé číslo větší nebo rovné x).

Dále budeme-li uvažovat podmnožiny A, B číselných těles (tzn. je definováno sčítání a násobení), budeme značit

$$A + B := \{a + b|a \in A, b \in B\}$$

a

$$A.B := \{a.b|a \in A, b \in B\}.$$

Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$ pak

$$\alpha A = \{\alpha.a|a \in A\}.$$

2.2. **Základní typy důkazů.** V následujícím textu budeme každé tvrzení dokazovat, pojďme si proto nejprve ujasnit, co takový důkaz znamená. Existuje několik základních metod důkazů.

2.2.1. *Přímý důkaz.* Přímý důkaz postupuje tak, že z předpokladů tvrzení a z axiomů, o kterých víme, že jsou pravdivé, přes řetězec implikací dojdeme nakonec k důkazu tvrzení.

Příklad 1. Součet dvou sudých čísel je sudé číslo.

Než postoupíme k samotnému důkazu, musíme si nejprve ujasnit, jaká čísla jsou sudá. Číslo n je sudé, jestliže existuje přirozené číslo k takové, že platí $n = 2k$. Přirozené číslo je liché, není-li sudé.

Důkaz. Nechť n_1, n_2 jsou sudá čísla, pak existují přirozená čísla k_i tak, že $n_i = 2k_i$ pak

$$n_1 + n_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$$

tedy číslo $n_1 + n_2$ je sudé, protože je dvojnásobkem přirozeného čísla. □

Cvičení 1. Ukažte, že číslo n je liché, právě když existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$n = 2k + 1.$$

Cvičení 2. Ukažte, že součet sudého a lichého čísla je lichý, a součet dvou lichých je sudý.

Příklad 2. Ukažte, že číslo $n^2 + n$ je sudé pro všechna n přirozená.

Důkaz. Číslo $n^2 + n$ můžeme zapsat ve tvaru $n(n+1)$. Protože n a $n+1$ jsou po sobě jdoucí čísla, jedno z nich musí být sudé a dá se zapsat ve tvaru $2k$. Označme to druhé písmenem c pak

$$n^2 + n = 2 \cdot kc$$

a tedy $n^2 + n$ je sudé. □

2.2.2. *Nepřímý důkaz.* Nepřímý důkaz, spočívá v tom, že místo abychom dokazovali závěr tvrzení, předpokládáme, že neplatí závěr a ukážeme, že pak neplatí ani předpoklad. Dokazujeme obměněnou implikaci, která je ekvivalentní původnímu tvrzení. Formálně zapsáno, místo

$$A \Rightarrow B$$

ukážeme logicky ekvivalentní tvrzení

$$\neg B \Rightarrow \neg A.$$

Analogie z přirozeného jazyka: řeknu-li "Bude-li pršet vezmu si deštník", je to stejné, jako bych řekl:"Nevezmu-li si deštník, nebude pršet".

Příklad 3. Je-li n^2 sudé, pak n je sudé.

Důkaz. Předpokládejme tedy, že závěr neplatí. Tedy n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$, že $n = 2k + 1$. Pak ale

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1$$

je liché číslo, což by bylo v rozporu s původním předpokladem. □

2.2.3. *Důkaz sporem.* Původně se tento postup dokazování nazýval "*reductio ad absurdum*". Přistoupíme na to, že tvrzení neplatí, tedy, že platí předpoklady tvrzení a zároveň neplatí závěr. Z těchto dvou předpokladů vyvodíme něco "absurdního", tedy něco, o čem víme, že neplatí. A protože víme, že to platit nemůže, víme, že musí platit tvrzení, které jsme chtěli dokázat.

Příklad 4. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionalní. Lze tedy zapsat ve tvaru

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

kde $p, q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla (jinak bychom mohli zlomek zkrátit jejich největším společným dělitelem). Umocněním a vynásobením číslem q^2 dostaneme

$$2q^2 = p^2.$$

Vidíme, že p^2 je sudé, tedy i p je sudé dle tvrzení, které jsme už dokázali. Proto $p = 2k$.

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

a tedy

$$q^2 = 2k^2.$$

Vidíme, že i q je sudé, pak ale p, q nejsou nesoudělná, neboť číslo 2 je jejich společný dělitel, což je spor. □

Tato důkazová technika byla známa již ve starověkém Řecku. Používal ji už Euklides. Ukažme si jeden z jeho nejslavnějších výsledků.

Věta 1 (Euklidova věta)**.** *Prvočísel je nekonečně mnoho.*

Důkaz. Předpokládejme, že prvočísel je pouze konečně mnoho. Označme

$$\mathfrak{P} := \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

množinu všech prvočísel. Položme

$$c := 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Vzhledem k tomu, že c není na seznamu prvočísel, musí se jednat o číslo složené, tedy

$$c = x_1 \cdot x_2,$$

kde $x_i > 1$. Vidíme, že obě čísla ze součinu musí být opět složená, protože c není dělitelné žádným prvočíslem (po dělení libovolným z nich dostaneme zbytek 1). První číslo v součinu znovu rozložíme. Takto, je-li první číslo složené, postupujeme dále. První číslo se při každém rozkladu alespoň dvakrát zmenší. Protože však číslo c je konečné, musí rozkládání jednou skončit. To ale znamená, že jsme narazili na prvočíslo a číslo c je jím dělitelné. To je ale spor. □

2.2.4. *Důkaz matematickou indukcí.* Důkaz matematickou indukcí se využívá v případě, že chceme dokázat tvrzení platné pro nějaký soubor očíslovaný přirozenými čísly. Každá indukce má dva kroky.

(1) Dokážeme, že platí $P(0)$ (platnost tvrzení pro případ $n = 0$).
(2) Dokážeme, že $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Příklad 5. Dokažte, že

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Důkaz. Nejprve dosazením snadno ověříme, že pro $n = 0$ tvrzení platí. Zbývá tedy ukázat druhou část, které se říká indukční krok. Předpokládáme $P(n)$, tedy

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Nyní (1) použijeme k úpravám

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = n + 1 + \sum_{i=0}^{n} i = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Tedy je $P(n+1)$. □

Uveďme ještě dva další příklady.

Příklad 6. Dokažte, že pokud $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, pak

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Důkaz. Pro $n = 0$ je

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

Tedy tvrzení v tomto případě platí. Zbývá ukázat indukční krok. Předpokládejme

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Chceme ukázat $P(n+1)$. Použitím indukčního předpokladu dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i = q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1},$$

což je $P(n+1)$. Tvrzení je dokázáno. □

V následujícím textu budeme tiše předpokládat, že známe pojem kombinačního čísla. Pro dvojici přirozených čísel $n \geqslant k$ definujeme *kombinační číslo* předpisem

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{jestliže } k \leqslant n \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jako cvičení přímočarým výpočtem ukažte, že platí následující tvrzení.

Tvrzení 1. *Nechť n, k jsou přirozená čísla. Potom*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Matematickou indukcí se dá dokázat i následující věta, známá již ze střední školy jako binomická věta, kterou budeme v následujícím textu hojně využívat.

Věta 2 (Binomická věta)**.** *Nechť* $x, y \in \mathbb{R}$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Důkaz. Budeme postupovat indukcí dle n. Vidíme, že pro $n = 0$ je

$$(x+y)^0 = x^0 y^0$$

Zbývá ukázat indukční krok. Nechť tvrzení platí pro n. Dostáváme

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k},
\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili tvrzení 1. □

Občas se dá použít i kreativnější indukce, jako když například dokazujeme následující nerovnost.

Věta 3 (AG-nerovnost)**.** *Nechť* $a_1, a_2, \dots a_n$ *jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Návod k důkazu. Ukažte, že pro $n = 1$ platí, dále ukažte, že $P(n) \Rightarrow P(2n)$ a pak $P(n+1) \Rightarrow P(n)$. Rozmyslete, proč tato podivná indukce pokrývá všechny případy □

2.3. **Číselné obory, axiomy reálných čísel.** Množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ považujeme za známé. Stejně jako operace $+, -, \cdot, /$ na těchto množinách. Množinu racionálních čísel jsme zavedli předpisem

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \quad | \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Všimněme si, že tato množina je spolu s operacemi $+, \cdot$ **komutativním tělesem** tzn. platí následující vlastnosti:

(T1) $\forall a, b \in \mathbb{Q} : \ a + b = b + a, \ a.b = b.a$;
(T2) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} : a + (b + c) = (a + b) + c, \ a(b.c) = (a.b).c$;
(T3) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} : a.(b + c) = a.b + a.c$;
(T4) $\exists \mathbf{0}, \mathbf{1} : (\forall a \in \mathbb{Q}) a + \mathbf{0} = a \wedge a.\mathbf{1} = a$;
(T5) $\forall a \in \mathbb{Q} \exists -a \in \mathbb{Q} : a + (-a) = \mathbf{0}$;
(T6) $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\} \exists a^{-1} : a.a^{-1} = \mathbf{1}$

Dále na tomto tělese je zavedeno uspořádání $\leqslant$.

Příklad 7. (i) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ spolu s klasickým sčítáním a násobením nejsou tělesa.
(ii) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ spolu s klasickým sčítáním a násobením jsou tělesa.
(iii) $\mathbb{C}$(množina komplexních čísel) se sčítáním po složkách a násobením definovaným předpisem

$$(a + bi)(c + di) = ac - db + (ad + bc)i$$

tvoří těleso.

(iv) Pokud p je prvočíslo, tvoří $\mathbb{Z}_p$ (množina zbytkových tříd po dělení p) spolu s operacemi

$$a \bigoplus_p b = (a+b) \mod p, \qquad a \bigotimes_p b = a.b \mod p$$

těleso.

Definice 1. Buďte A, B množiny. *Relací mezi množinami* A, B rozumíme jakoukoliv množinu

$$\mathcal{R} \subset A \times B.$$

Fakt, že $(a, b) \in \mathcal{R}$ zapisujeme zkráceně jako $a\mathcal{R}b$. Pokud navíc $A = B$ hovoříme o *relaci na množině* A.

Uspořádáním $\prec$ na množině A budeme dále rozumět relaci, pro kterou platí:

(1)
$$(x \prec y \wedge y \prec z) \Rightarrow x \prec z;$$

(2)
$$(x \prec y \wedge y \prec x) \Rightarrow x = y.$$

Buď $(A, \prec)$ uspořádaná množina řekneme, že $B \subset A$ je *shora, resp. zdola omezená množina*, jestliže

$$(\exists a \in A)(\forall b \in B) b \prec a \quad (\textit{resp. } a \prec b)$$

je-li omezená shora i zdola pak je *omezená*.

Definice 2 (Supremum a infimum množiny)**.** Buď $(M, \prec)$ uspořádaná množina a $A \subset M$. Řekneme, že S je *Horní závora množiny* A, jestliže

$$(\forall x \in A) x \prec S$$

dolní závora množiny A pokud

$$(\forall x \in A) S \prec x$$

Řekneme, že S je *supremum množiny* A, pokud je její horní závorou a navíc platí: pokud h je horní závorou A, pak $S \prec h$.

Řekneme, že S je *infimum množiny* A pokud je její horní závorou a navíc platí: pokud h je dolní závorou A, pak $h \prec S$

Definice 3 (Vlastnost suprema)**.** Řekneme, že uspořádaná množina má vlastnost suprema, jestliže každá její shora omezená podmnožina má supremum.

Značení 1. Pro lineárně uspořádanou množinu M budeme značit $\max(M)$ maximální prvek množiny M. Symbolem $\min(M)$ značíme minimální prvek množiny M supremum budeme značit $\sup(M)$ a infimum $\inf(M)$

Pozorování 1. Pokud existuje minimální prvek množiny pak je roven infimu. Pokud existuje maximální prvek množiny je roven supremu.

Definice 4 (Těleso reálných čísel)**.** Těleso reálných čísel dále jen $\mathbb{R}$, je nejmenší uspořádané těleso, obsahující racionální čísla jako podmnožinu, které má vlastnost suprema (při uspořádání $\leqslant$). Tzn. každá neprázdná shora omezená množina má supremum.

Poznámka 1. V případě konečných množin je supremem vždy maximální prvek. Ne každá nekonečná podmnožina reálných čísel má, ale maximální prvek a to ani když je shora omezená.

Příklad 8. (i) Pokud $M = \left\{\frac{1}{n} | n \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})\right\}$, pak $\sup(M) = 1 = \max M$ a $\inf(M) = 0$ v tomto případě $\min(M)$ neexistuje.
(ii) $M = (0, 1)$ nemá minimální ani maximální prvek. Dále je $\sup(M) = 1$ a $\inf(M) = 0$.

Příklad 9. Všimněme si, že samotná racionální čísla tuto klíčovou vlastnost nemají. Uvažujme například množinu

$$A := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$

pak zřejmě množina obsahuje pouze racionální čísla, je shora omezená, ale

$$\sup(A) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Tvrzení 2 (vlastnost infima)**.** *Každá zdola omezená množina $A \subset \mathbb{R}$ má infimum.*

Důkaz. Označme $M := \{x \in \mathbb{R} | (\forall a \in A) x \leqslant a\}$ pak nutně M je neprázdná a shora omezená tedy má supremum I. Pak už ale

$$I = \inf(A).$$

□

2.4. **Příklady k procvičení.**

1. Zapište pomocí symbolů $\sum$ a $\prod$ následující výrazy
   - $1+2+4+8+16$
   - $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\dots\cdot\frac{21}{23}$
   - $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$
   - $-1+3-5+7-\dots-441$
   - $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\dots.$
2. Dokažte, že pro libovolné n přirozené je číslo 6^n-1 dělitelné pěti.
3. Dokažte, že platí
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
4. Ukažte, že $n!>3^n$, pro všechna $n\geqslant 7$.
5. Ukažte, že pro všechna $x\in(-1,\infty)$ platí nerovnost
$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$
6. Ukažte, že číslo $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ je iracionální.
7. Ukažte, že
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
8. *
$$n^{n+1}>(n+1)^n,\quad\forall n>2$$
9. * V jednom městečku v Arábii se jednoho dne objevil cizinec. Na městském sněmu prohlásil, že ve městě je alespoň jedna žena, která je nevěrná. Aby neupadaly mravy bylo navrženo, aby každý muž, který se dozví, že mu je žena nevěrná ženu zabil a v noci přinesl na náměstí pro výstrahu ostatním. Každý z mužů ví o nevěře všech ostatních žen jen ne o té svojí. První den po příjezdu cizince bylo náměstí čisté, stejně tak druhý den. Ještě 6 dne byly všchny ženy živé. 7 dne se objevily všechny až na jednu mrtvé na náměstí. Kolik je ve městě žen?
10. Určete suprema a infima následujících množin. Rozhodněte zda má daná množina maximální/minimální prvek
    a) $M:=(a,b\rangle$
    b) $A:=\{\frac{k}{k+1}:k\in\mathbb{N}\}$
    c) $B:=\{\frac{q}{q+p}:p\in\mathbb{N},q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$
    d) $C:=\{x^2-5x+3:x\in\mathbb{R}\}$
    e) $D:=\{|\sqrt{2}-q|:q\in\mathbb{Q}\}$
    f) $E:=\{\frac{n+(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\}$
    g) * $F:=\{\sin(n):n\in\mathbb{N}\}$

3. Zobrazení, funkce, posloupnosti

Zobrazení f mezi dvěma množinami A, B budeme chápat jako relaci pro kterou, platí, že pro každé $x \in A$ existuje jediné $y \in B$ tak, že

$$x\mathcal{R}y.$$

v případě zobrazení budeme tento fakt symbolicky zapisovat jako

$$y = f(x).$$

Fakt, že f je zobrazení z množiny A do množiny B, budeme zapisovat jako $f : A \to B$. Množinu všech zobrazení z množiny A do B budeme značit symbolem

$$B^A.$$

Množinu všech reálných posloupností bycho tedy takto označili symbolem

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

a množinu reálných funkcí jako

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Definice 5. Buď $f : A \to B$. Nechť platí $C \subset A$, $D \subset B$. Definujeme

(i) obraz množiny C předpisem

$$f(C) := \{f(x) : x \in C\};$$

(ii) vzor množiny D jako

$$f^{-1}(D) := \{x : f(x) \in D\}.$$

Pozor, vzor množiny existuje vždy, a to i v případě, že původní zobrazení nemá zobrazení inverzní. Pokud inverzní zobrazení existuje pak je obraz množiny v inverzním zobrazením vzorem původní množiny.

Příklad 10. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem $f(x) = x^2$. Pak

$$f((-1, 2)) = \langle 0, 4)$$

a

$$f^{-1}((0, 9)) = (-3, 3) \setminus \{0\}.$$

Příklad 11. Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definováno předpisem

$$f(n) = 2n.$$

Pak $f(\mathbb{N})$ je množina sudých čísel.

Definice 6. Nechť je dáno $f : A \to B$. Řekneme, že zobrazení f je

(i) *prosté* (nebo též *injektivní*), pokud platí

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y;$$

(ii) *na* (nebo též *surjektivní*), jestliže

$$f(A) = B;$$

(iii) *vzájemně jednoznačné* (nebo též *bijektivní* nebo zkráceně *bijekce*), je-li prosté a zároveň je na.

Příklad 12. Zobrazení z příkladu 11 je prosté. Pokud totiž

$$f(n_1) = f(n_2) \text{ pak } 2n_1 = 2n_2$$

a tedy $n_1 = n_2$. Zobrazení není na, neboť množina $f(\mathbb{N})$ neobsahuje lichá čísla. Zobrazení z příkladu 10 není prosté a není na. Není prosté neboť např.

$$f(1) = f(-1)$$

a není na, jelikož $f(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty)$, v obraze tedy chybí záporná čísla.

Příklad 13. Zobrazení $f : (0, 1) \to (1, \infty)$ definované předpisem

$$f(x) = 1/x$$

je bijekce.

Definice 7. Nechť $g : A \to B$ a $f : B \to C$ jsou zobrazení. Složeným zobrazením rozumíme zobrazení $f \circ g : A \to C$ definované předpisem

$$f \circ g(x) := f(g(x)).$$

Příklad 14. Nechť $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 5$, pak

$$f \circ g(x) = (2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25.$$

Věta 4 (O skládání zobrazení)**.** *Nechť* $h : C \to D$, $f : B \to C$ *a* $g : A \to B$ *jsou zobrazení. Pak platí:*

(i) *Pokud* $f \circ g$ *je prosté, pak* g *je prosté.*
(ii) *Je-li* $f \circ g$ *na, pak* f *je na.*
(iii)

$$(h \circ f) \circ g(x) = h \circ (f \circ g)(x), \forall x \in A.$$

Důkaz. (i): Nechť $f \circ g$ je prosté. Pokud pro $x, y \in A$ je

$$g(x) = g(y),$$

pak už nutně

$$f(g(x)) = f(g(y)), \text{ tedy i } f \circ g(x) = f \circ g(y).$$

Protože složené zobrazení je prosté dostáváme, že $x = y$. Vidíme tedy, že g je prosté.
(ii): Nechť $f \circ g$ je na. Pak

$$f(B) \supset f(g(A)).$$

Protože však $f(g(A)) = C$, pak $f(B) = C$ tedy f je na.
(iii): Zkuste sami rozmyslet, proč to platí. □

Věta 5 (O složení zobrazení)**.** *Nechť* $g : A \to B$ *a* $f : B \to C$ *jsou zobrazení.*

(i) *Jsou-li* f, g *prostá zobrazení je zobrazení* $f \circ g$ *prosté.*
(ii) *Jsou-li zobrazení* f, g *na pak* $f \circ g$ *je také na.*

Důkaz. Cvičení. (Bude na přednášce.) □

Věta 6 (O inverzním zobrazení)**.** *Nechť* $f : A \to B$ *je prosté zobrazení. Pak existuje zobrazení* $f^{-1} : f(A) \to A$ *takové, že pro všechna* $x \in A$ *je*

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

Důkaz. Zvolme $y \in f(A)$. Tvrdíme, že pro toto y existuje jediné x tak, že $y = f(x)$. Existence plyne z toho, že y je v obrazu A. Pokud by takové prvky byly aspoň dva různé, pak bychom je označili x_1, x_2. Platí

$$f(x_1) = y = f(x_2)$$

pak ale z faktu, že f je prosté vyplývá $x_1 = x_2$, což je spor. Tedy existuje jediný x jehož obrazem je y. Můžeme proto položit

$$f^{-1}(y) := x.$$

□

Příklad 15. Nechť $f(x) = 2^x + 3$. Najděte inverzní funkci.

Řešení. Ověříme nejprve, zda je funkce prostá. Pokud $f(x_1) = f(x_2)$, pak

$$2^{x_1} + 3 = 2^{x_2} + 3$$

tedy po odečtení 3 a zlogaritmování obou stran rovnice dostaneme $x_1 = x_2$. Z definice f^{-1} má platit

$$f^{-1}(2^x + 3) = x,$$

tedy označme $y = 2^x + 3$ a vyjádřeme x pomocí y
$$y - 3 = 2^x$$
tedy
$$x = \ln_2(y-3)$$
dostáváme
$$f^{-1}(y) = \ln_2(y-3).$$
□

3.1. **Reálné posloupnosti a funkce, příklady.** Následující pojmy už by měly být známy ze střední školy, přesto je raději připomeňme.

Definice 8 (Monotónní posloupnosti a funkce)**.** Nechť $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nebo $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dále označme symbolem $\mathbb{F}$ množinu reálných nebo přirozených čísel. Řekneme, že

(i) f je *nerostoucí* pokud $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$
(ii) f je *rostoucí* pokud $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
(iii) f je *neklesající* pokud $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
(iv) f je *klesající* pokud $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
(v) Řekneme, že funkce je monotónní, platí-li jedna z předchozích možností.
(vi) Řekneme, že funkce je nerostoucí na dané množině, platí-li předchozí implikace pro všechny prvky dané množiny.

Příklad 16. (1) Funkce $f(x) = x^2$ není ani roustoucí ani klesající, ani nerostoucí ani neklesající na $\mathbb{R}$. Funkce je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$.
(2) Funkce $f(x) = \sqrt{x+1}$ je rostoucí na intervalu $\langle -1, \infty)$.

Tvrzení 3 (Monotonie složeného zobrazení)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ jsou reaálné funkce (resp. posloupnosti).*

(i) *Pokud f, g jsou rostoucí pak $f \circ g$ je rostoucí.*
(ii) *Jsou-li f, g klesající pak $f \circ g$ je rostoucí.*
(iii) *Je-li jedna z dvojice f, g rostoucí a druhá klesající pak je $f \circ g$ klesající.*
(iv) *Jsou-li f, g rostoucí resp. klesající pak je i funkce $f + g$ rostoucí resp. klesající. Jestliže navíc $f, g \geqslant 0$ je rostoucí resp. klesající i funkce $f.g$.*

Důkaz. Stačí vyjít z definice. Ukážeme zde pouze (i) a (iv). V ostatních případech postupujeme podobně přímočaře. Pokud $x_1 < x_2$ pak $g(x_1) < g(x_2)$ protože g je rostoucí. Pak, ale $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, protože f je také rostoucí. Tedy
$$f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2)$$
a tedy $f \circ g$ je rostoucí.

(iv): Pokud $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2) \wedge g(x_1) < g(x_2)$ a tedy
$$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$
tedy
$$(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$$
a tedy $f + g$ je rostoucí. □

Příklad 17. Funkce $\sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ je klesající na intervalu $(-\infty, -1/2\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle -1/2, \infty)$.

Zdůvodnění. Skutečně protože funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je rostoucí na reálných číslech stačí ukázat, že funkce $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$ je klesající na $(-\infty, -1/2\rangle$ a rostoucí na $\langle -1/2, \infty)$, což je očividné. Zbytek už vyplývá z předchozí věty o monotonii složeného zobrazení. □

Definice 9 (Lineární zobrazení)**.** Nechť T je těleso a V, K množiny, na kterých je definováno sčítání a násobení prvkem tělesa. Nechť $f : V \to K$ je zobrazení. Řekneme, že f *je lineární*, jestliže

(L1) $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in V$
(L2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall x \in V, \forall \alpha \in T$.

Příklad 18. (i) Rotace v rovině i prostoru (s klasickým sčítáním a násobení vektorů) je lineární zobrazení.
(ii) Translace (posunutí) v rovině i prostoru, není lineární zobrazení.

3.2. **Příklady k procvičení.**

1. Vyřešte nerovnici v $\mathbb{R}$
$$||x-1|-1|<1.$$
2. Ukažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí nerovnosti
$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \quad |a|-|b| \leqslant |a-b|.$$
3. Ukažte, že skládání funkcí není komutativní (nemůžeme zaměnit pořadí skládaných funkcí).
4. Je dána funkce
$$f(x)=e^{2x+1}$$
Nalezněte $f((0,5))$ a $f^{-1}(-1,2)$.
5. Definujme funkci
$$f(x)=|x|+x$$
Rozhodněte, zda je funkce prostá, určete obor hodnot a množinu $f^{-1}(\langle 0,1\rangle)$
6. Nalezněte obor hodnot funkce
$$f(x)=x^2-3x+1$$
7. Zjistěte, zda jsou funkce prosté. Nalezněte inverzní funkci (v případěm, že není prostá nalezněte maximální intervaly na kterých prostá je a určete inverzní funkci na tomto intervalu).
   - $f(x)=x^2-x$
   - $f(x)=\frac{1}{1-x}$
   - $$f(x)=\sqrt{x-3+2/x}$$
8. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení a $M, N \subset A$, $R, Q \subset B$. Zjistěte, které z následujících vztahů platí. Své odpovědi odůvodněte.
   - $f(M \cup N)=f(M) \cup f(N)$
   - $f(M \setminus N)=f(A) \setminus f(B)$
   - $f(M \cap N)=f(M) \cap f(N)$
   - Pokud $R \cap Q=\emptyset$ pak $f^{-1}(R) \cap f^{-1}(Q)=\emptyset$
9. Ukažte, že zobrazení $f: A \to B$ je prosté, právě když pro všechna $y \in B$ je množina $f^{-1}(\{y\})$ maximálně jednobodová.
10. Nalezněte bijekce mezi množinami
    - $(0,1)$ a $(1,\infty)$;
    - (a,b) a $\mathbb{R}$;
    - * $(0,1)$ a $\langle 0,1\rangle$.
11. ** Nalezněte funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že pro libovolný otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ je
$$f(I)=\mathbb{R}$$

4. Posloupnosti reálných čísel

Připomeňme, že reálnou posloupností rozumíme zobrazení z množiny připrozených čísel do množiny reálných čísel. Uveďme pár jednoduchých příkladů posloupností.

Příklad 19. (i) *Aritmetickou posloupností* rozumíme každou posloupnost, která je pro zadanou hodnotu $a_0, d \in \mathbb{R}$ ve tvaru

$$a_{n+1} := a_0 + nd$$

(ii) *Geometrickou posloupností* rozumíme každou posloupnost, která je pro zadanou hodnotu $a_0, d \in \mathbb{R}$ ve tvaru

$$a_{n+1} := a_0 q^n$$

Některé posloupnosti nemusí být zadány explicitním předpisem, který závisí na indexu, ale mohou být zadány hodnotami prvních několika členů a závislostí pomocí které se z několika předcházejících členů vypočítá další člen. Příkladem takové posloupnosti je známá Fibonacciho posloupnost, která je zadána takto

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$$

Takto zadané posloupnosti budeme říkat *rekurentní posloupnost.*

Pozorování 2. Posloupnost je

(i) rostoucí, právě když

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} > a_n;$$

(ii) klesající, právě když

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} < a_n;$$

(iii) nerostoucí, právě když

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \leqslant a_n;$$

(iv) neklesající, právě když

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \geqslant a_n.$$

4.1. **Limita posloupnosti.** V tomto oddíle a dále budeme dále místo symbolu $f(n)$ pro n-tý člen posloupnosti používat symbol a_n, čímž snadno odlišíme reálnou posloupnost od reálné funkce, ačkoliv i reálná posloupnost je reálnou funkcí na přírozených číslech.

Pojmem *okolí* $x \in \mathbb{R}$ budeme dále rozumět množinu

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

V následujícím textu budeme často pracovat i s nekonečnými limitami. Budeme tedy muset rozšířit náš obor reálných čísel na obor *rozšířených reálných čísel,* který bude definován jako

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Pokud máme $x, y \in \mathbb{R}$ (tedy klasická reálná čísla), probíhají aritmetické operace stejným způsobem jako na $\mathbb{R}$. Operace s $\pm\infty$ jsou definovány takto:

- $\infty + \infty = \infty$
- Pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$

$$\alpha.\infty = \begin{cases} \infty \text{ pro } \alpha > 0 \\ -\infty \text{ pro } \alpha < 0 \end{cases}$$

- Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\infty + \alpha = \infty$ a $\alpha - \infty = -\infty$.
- $\infty.\infty = \infty$
- $\frac{\alpha}{\infty} = 0$ pokud $|\alpha| < \infty$.

Operace $\infty - \infty$, $\infty.0$, ∞/∞ naopak nejsou definovány. V následujícím textu se též bude hodit definujeme-li ε okolí bodů $\pm\infty$ a to jako

$$U_\varepsilon(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ a } U_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

Definice 10 (limita posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_n \in U_\varepsilon(L) \quad (\forall n \geqslant n_0).$$

Tento fakt zapisujeme symbolicky jako

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Pokud limita existuje a $L \in \mathbb{R}$ pak říkáme, že *posloupnost konverguje.* V opačném případě řekneme, že *posloupnost diverguje.*

Poznámka 2 (alternativní definice limity)**.** Pojem limity lze zavést i trochu jiným způsobem. A to tak, že číslo $L \in \mathbb{R}$ je limita pokud se v jeho libovolném okolí nacházejí všechny její členy až na konečně mnoho výjimek. Podobně, lze i jednoduše zavést následující pojmy.

Tvrzení 4 (Jednoznačnost limity)**.** *Každá reálná posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Sporem: Nechť existují dvě limity. Větší z nich označme L_2 menší L_1 (tedy, $L_1 < L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$). Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$U_\varepsilon(L_1) \cap U_\varepsilon(L_2) = \emptyset. \tag{2}$$

(Rozmyslete, že i v případě kdy je jedna z limit $\pm\infty$) to tak je.) Dle definice limity, existuje n_0 tak, že

$$a_n \in U_\varepsilon(L_1) \quad (\forall n \geqslant n_0).$$

Zároveň protože L_2 je také limita, pak existuje m_0, že

$$a_n \in U_\varepsilon(L_2) \quad (\forall n \geqslant m_0).$$

Položme $k := \max\{n_0, m_0\}$ pak

$$a_k \in U_\varepsilon(L_1) \cap U_\varepsilon(L_2),$$

což je spor s (2). □

Věta 7 (Základní limity)**.** (a)

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & |a| < 1 \\ \text{neexistuje} & a \leqslant -1 \end{cases}$$

Důkaz. (a): Nechť nejprve $\alpha > 0$. Vol $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že od určitého n_0 platí

$$n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s

$$n > \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}.$$

Pro $n \geqslant n_0$, kde

$$n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}} \right\rceil + 1$$

tedy nerovnost platí.

Nechť $\alpha < 0$. Vol $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že od určitého n_0 platí

$$n^\alpha < \varepsilon.$$

To je ekvivalentní s

$$n > \varepsilon^{1/\alpha}.$$

tedy stačí zvolit

$$n_0 := \left\lceil \varepsilon^{1/\alpha} \right\rceil + 1.$$

Případ $\alpha = 0$ je triviální.

(b): Nechť $a \in (0,1)$. Vol $\varepsilon > 0$. Zřejmě

$$a^n > 0$$

Stačí tedy ukázat, že od určitého n_0 platí

$$a^n < \varepsilon.$$

To je ekvivalentní s

$$n > \log_a(\varepsilon)$$

Stačí tedy zvolit

$$n_0 := \max\{\lceil \log_a(\varepsilon) \rceil, 0\} + 1.$$

Nechť $a \in (1,\infty)$. Vol $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že od určitého n_0 platí

$$a^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

To je ekvivalentní s

$$n > -\log_a(\varepsilon)$$

Stačí tedy zvolit

$$n_0 := \max\{-\lceil \log_a(\varepsilon) \rceil, 0\} + 1.$$

□

Věta 8 (Věta o dvou policistech)**.** *Buďte* a_n, b_n, c_n *tři reálné posloupnosti, tak, že existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, že*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall n \geqslant n_0. \tag{3}$$

Potom

(i) *Pokud* $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$ *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$
(ii) *Pokud* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$
(iii) *Pokud* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ *pak existuje limita* b_n *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$*.*

Důkaz. Ukážeme (ii) a (iii). (i) by se dokazovala podobně jako (ii).

(ii) Vol $\varepsilon > 0$. Existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_n \in U_\varepsilon(\infty) \quad (\forall n \geqslant m_0).$$

Pak ale platí, že

$$b_n \in U_\varepsilon(\infty) \quad (\forall n \geqslant \max\{m_0, n_0\}),$$

kde n_0 je z (3).

(iii) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, kde $L \in \mathbb{R}$ (pro $L = \pm\infty$ by tvrzení okamžitě vyplývalo z (i) resp. (ii)). Vol $\varepsilon > 0$. Existují l_0, m_0 tak, že

$$a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \forall (n \geqslant l_0) \quad \wedge \quad c_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \forall (n \geqslant m_0).$$

Pak ale pro všechna $n \geqslant \max\{n_0, m_0, l_0\}$ máme, že a_n leží v $U_\varepsilon(L)$ a c_n leží v $U_\varepsilon(L)$. Protože b_n je mezi a_n, c_n, $b_n \in U_\varepsilon(L)$ (rozmyslete, že pokud dvě hodnoty leží v inervalu, musí tam ležet i libovolná hodnota mezi nimi.) Tedy

$$b_n \in U_\varepsilon(L) \quad (\forall n \geqslant \max\{n_0, m_0, l_0\}).$$

□

Lemma 1 (O okolí)**.** Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

(i) Existuje $\delta > 0$ tak, že
$$U_\delta(a) + U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a+b)$$
(ii) Existuje $\delta > 0$, že
$$U_\delta(a).U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a.b)$$
(iii) Je-li navíc $b \neq 0$ pak existuje $\delta > 0$, že
$$\frac{U_\delta(a)}{U_\delta(b)} \subset U_\varepsilon(a/b)$$

Důkaz. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Případy kdy je jedna z hodnot $\pm\infty$ si rozmyslete za cvičení.

(i) Položme $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Pak je
$$U_\delta(a) = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{a} \quad U_\delta(b) = \left(b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Tedy pro všechna $x \in U_\delta(a)$ a pro všechna $y \in U_\delta(b)$ je
$$a + b - \varepsilon \leqslant x + y \leqslant a + b + \varepsilon$$
Tedy pro
$$z \in U_\delta(a) + U_\delta(b)$$
existují x, y tak, že
$$z = x + y,$$
kde $x \in U_\delta(a) \wedge y \in U_\delta(b)$, pak ale $z \in U_\varepsilon(a+b)$. Proto je
$$U_\delta(a) + U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a+b).$$

(ii) Vol $\varepsilon > 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\varepsilon < 1$. Položme
$$\delta := \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$
Pokud
$$z \in U_\delta(a).U_\delta(b),$$
pak
$$z = x.y,$$
kde $x \in U_\delta(a)$ a $y \in U_\delta(b)$. Tedy
$$x \in \left(a - \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}, a + \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}\right) \wedge y \in \left(b - \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}, b + \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}\right).$$
Stačí ukázat, že $x \in \overline{U_\delta(a)}, y \in \overline{U_\delta(b)}$ (kde čára nad okolím znamená uzavřený interval namísto otevřeného intervalu), pak
$$x.y \in U_\varepsilon(a.b).$$
Pro pevné $y \in U_\delta(b)$ je funkce $x \mapsto x.y$ lineární, tedy minima a maxima nabývá v krajních bodech uzavřeného intervalu $\overline{U_\delta(a)}$. Podobně zafixujeme-li $x \in \overline{U_\delta(a)}$ funkce $y \mapsto y.x$ je lineární a maxima, či minima nabývá v krajních bodech. Proto stačí ukázat, že
$$a.b - \varepsilon \leqslant \min\{(a \pm \delta).(b \pm \delta)\} \leqslant \max\{(a \pm \delta).(b \pm \delta)\} \leqslant a.b + \varepsilon$$
Máme
$$\begin{aligned}
\max\{(a \pm \delta).(b \pm \delta)\} &\leqslant \max\{a.b + \delta(\pm a \pm b) \pm \delta^2\} \\
&\leqslant a.b + \delta(|a| + |b|) + \delta^2 \\
&\leqslant a.b + \frac{\varepsilon(|a|+|b|)}{|a|+|b|+1} + \frac{\varepsilon^2}{(|a|+|b|+1)^2} \\
&\leqslant a.b + \frac{\varepsilon(|a|+|b|)}{|a|+|b|+1} + \frac{\varepsilon}{(|a|+|b|+1)^2} \\
&\leqslant a.b + \varepsilon.
\end{aligned}$$

V předposlední nerovnosti jsme využili faktu, že $\varepsilon < 1$ a tedy $\varepsilon^2 < \varepsilon$. Podobně ukážeme, že

$$a.b - \varepsilon \leqslant \min\{(a \pm \delta).(b \pm \delta)\}.$$

(iii) Pokud $b \neq 0$ pak $a/b = a \cdot b^{-1}$. Bez ujmy na obecnosti nechť $b > 0$. Tedy $U_\varepsilon(a/b) = U_\varepsilon(a.b^{-1})$. Dle (ii) existuje $1/b > \eta > 0$, že

$$U_\eta(a).U_\eta(b^{-1}) \subset U_\varepsilon(a/b).$$

Pokud je $x \in U_\eta(a)$, stačí tedy zvolit $y \in \mathbb{R}$ tak, aby $y^{-1} \in U_\eta(b^{-1})$ a budeme mít

$$x/y \in U_\varepsilon(a/b).$$

Tedy

$$b^{-1} - \eta \leqslant \frac{1}{y} \leqslant b^{-1} + \eta,$$

k čemuž stačí, aby

$$y \in \left(\frac{b}{1+\eta b}, \frac{b}{1-\eta b}\right).$$

Označme

$$\delta := \min\left\{\frac{\eta b^2}{1+\eta b}, \eta\right\}.$$

Pak

$$\frac{U_\delta(a)}{U_\delta(b)} \subset U_\varepsilon(a/b).$$

□

Pozorování 3. Stejně tak platí předchozí tvrzení o okolí i pro $a, b \in \mathbb{R}^*$ mají-li příslušné operace smysl.

Věta 9 (O aritmetice limit)**.** *Nechť* a_n, b_n *jsou reálné posloupnosti a* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Pak*

(i)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n;$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n;$$

(iii)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;$$

(iv)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Mají-li výrazy napravo smysl (tzn. existují-li limity napravo a příslušná operace je definována na $\mathbb{R}^*$*).*

Důkaz. Označme limity a_n, b_n po řadě a, b. Vol $\varepsilon > 0$.

(i) Z Lemma 1(i) víme, že existuje $\delta > 0$ tak, že

$$U_\delta(a) + U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a + b).$$

Existují m_0, n_0 tak, že

$$a_n \in U_\delta(a) \quad (\forall n \geqslant n_0) \quad \wedge \quad b_n \in U_\delta(b) \quad (\forall n \geqslant m_0).$$

Pak ale pro všechna $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ je

$$a_n + b_n \in U_\varepsilon(a + b).$$

Podobně dokážeme (iii). Z Lemma 1(ii) víme, že existuje $\delta > 0$ tak, že

$$U_\delta(a).U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a.b).$$

Existují m_0, n_0 tak že

$$a_n \in U_\delta(a) \quad (\forall n \geqslant n_0) \quad \wedge \quad b_n \in U_\delta(b) \quad (\forall n \geqslant m_0).$$

Pak ale pro všechna $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ je

$$a_n.b_n \in U_\varepsilon(a.b).$$

Analogicky dokážeme (iv). (ii) je důsledkem (iii)(stačí vzít $b_n = \alpha$ a aplikovat (iii)). □

Věta 10. *Nechť* $\alpha > 1$. *Pak pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\alpha^n} = 0.$$

Důkaz.

$$\alpha = 1 + \delta$$

kde $\delta > 0$. Dle binomické věty (viz.2) je

$$0 \leqslant \frac{n^k}{\alpha^n} = \frac{n^k}{\sum_{j=1}^n \binom{n}{j}\delta^j} \leqslant \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}\delta^{k+1}} = \delta^{-k-1} \frac{n^k}{n^{k+1}\left(1 + \frac{c_k}{n} + \frac{c_{k-1}}{n^2} + \cdots + \frac{c_0}{n^k}\right)} =: a_n,$$

kde c_i jsou koeficienty nezávislé na n. Tedy dle věty o aritmetice limit, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Pak ale, dle věty od dvou policistech (viz. 8) je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\alpha^n} = 0.$$

□

Cvičení 3. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Důkaz. Využijeme větu o dvou policajtech (8). Dolní odhad posloupnosti $\sqrt[n]{n}$ získáme snadno z toho, že libovolná kladná odmocnina z čísla většího než jedna je vždy opět větší než jedna, tedy také:

$$\sqrt[n]{n} \geqslant 1 \ (\forall n \geqslant 1)$$

Horní odhad pak vyjde z věty 10 - vyčteme z ní, že pro libovolné $\alpha \geqslant 1$ a každé $k \in \mathbb{N}$ musí existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geqslant n_0$ je výraz α^n větší, než výraz n^k (jinak by limita jejich podílu nešla k nule). Pokud si zvolíme $k = 1$, vidíme, že naše n pod odmocninou odpovídá menšímu z těchto výrazů, takže ho lze odhadnout shora libovolným α^n. Tuto skutečnost zapišme tak, že zvolíme $\varepsilon > 0$ a řekněme, že $\alpha = 1 + \epsilon$. Máme tedy odhad

$$n \leqslant (1+\varepsilon)^n \ (\forall n \geqslant n_0)$$

(že platí jen od určitého n_0 větě o dvou policajtech vyhovuje) a celkově naše odhady vypadají takto:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{(1+\varepsilon)^n} \ (\forall n \geqslant n_0)$$

Nyní určeme limity odhadů. Limita dolního odhadu je patrně 1. Co se týká horního odhadu, n v exponentu a odmocnině se navzájem odstraní a zbyde jen výraz $1 + \epsilon$. Potom stačí zvoilt epsilon tak, aby se limitně blížilo nule a celý výraz půjde k 1. Volme např. $\epsilon := 2^{-n}$. Pak máme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+2^{-n})^n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2^n} = 1 + 0 = 1$$

Jelikož limity horního a dolního odhadu vyšly shodně (= 1), výraz mezi nimi musí mít stejnou limitu, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

Cvičení 4. Ukažte, že pro všechna $a \in \langle 0, \infty)$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Definice 11 (limes superior, limes inferior, hromadné body). (i) Řekneme, že $L \in \mathbb{R}$ je *hromadný bod posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ obsahuje $U_\varepsilon(L)$ nekonečně mnoho členů a_n

(ii) Definujme limes superior předpisem

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup(H),$$

kde, H značí množinu hromadných bodů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(iii) *Limes inferior* definujeme předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \inf(H)$$

Tvrzení 5. *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je reálná posloupnost. Pak*

(i) $\limsup a_n = \inf_n(\sup_{k>n} a_k)$

(ii) $\liminf a_n = \sup_n(\inf_{k>n} a_k)$

(iii) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu právě, když* $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. *V takovém případě je limita rovna* $\limsup$ *resp.* $\liminf$.

Důkaz. (i): Pro n přirozené označme

$$M_n := \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \{a_k : k > n\}$$

a

$$s_n := \sup(M_n).$$

Dále označme

$$R := \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n, \quad L := \limsup a_n.$$

Nejprve ukážeme, že je $L \leqslant R$. Stačí ukázat, že pro všechna $a \in \mathbb{R}^*$ je

$$a > R \quad \text{pak} \quad a > L.$$

Ukážeme, že pokud $a > R$ pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a - \varepsilon \geqslant H$ pro libovolný hromadný bod H posloupnosti a_n. Pokud $a > R$ pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$a - \varepsilon > R.$$

Vidíme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$a - \varepsilon > s_{n_0}.$$

Proto platí

$$a - \varepsilon > a_n \quad (\forall n \geqslant n_0 + 1).$$

Tedy pro libovolný hromadný bod H je

$$a - \varepsilon \geqslant h$$

a tedy

$$a > L.$$

Na druhou stranu, ukážeme-li, že R je hromadný bod, pak zjevně bude platit $L \geqslant R$. Vol $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že

$$U_\varepsilon(R) \cap \{a_1, a_2, \dots\}$$

je nekonečná množina. K tomu stačí ukázat, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina

$$U_\varepsilon(R) \cap \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$$

neprázdná. Tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$R \leqslant s_n < R + \varepsilon$$

Položme $l := \max\{n, k\}$. Posloupnost s_n je klesající a tedy

$$R \leqslant s_l < R + \varepsilon.$$

tedy existuje $k_l \in \mathbb{N}, k_l > l$ tak, že

$$s_l + \varepsilon \geqslant a_{k_l} + \varepsilon > s_l.$$

A proto
$$R - \varepsilon < a_{k_l} < R + \varepsilon$$
tudíž
$$a_{k_l} \in U_\varepsilon(L).$$
$\square$

Příklad 20. Je-li $(a_n)_{n=1}^\infty$ definována předpisem
$$a_n = (-1)^n$$
pak je
$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1 \text{ a } \liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1.$$

Příklad 21. Označme $a_n = \sin(n)$ pak je
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$$
a
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Věta 11 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu. Pokud je navíc omezená, pak je konvergentní.*

Důkaz. Nechť a_n je neklesající. Pak ukážeme, že
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_i : i \in \mathbb{N}\} =: S.$$
Nechť nejprve $S < \infty$. Vol $\varepsilon > 0$. Pak existuje n_0 přirozené tak, že
$$a_{n_0} \geqslant S\varepsilon.$$
Protože a_n je neklesající, je pro každé $n > n_0$
$$S \geqslant a_n \geqslant a_{n_0} > S - \varepsilon.$$
Tedy $a_n \in U_\varepsilon(S)$. A tedy limita a_n je S. Pokud $S = \infty$, vol $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 tak, že
$$a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Pak ale
$$a_n \geqslant a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\forall n \geqslant n_0).$$
Tedy $\lim a_n = \infty$. Pro nerostoucí posloupnost provedeme důkaz analogicky. $\square$

Definice 12. Řekneme, že posloupnost b_n *je vybraná z* a_n, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(k_n)_{n=1}^\infty$ taková, že
$$b_n = a_{k_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Věta 12. *Nechť* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *je omezená posloupnost a* b_n *je posloupnost z ní vybraná. Pak*
$$\liminf a_n \leqslant \liminf b_n \leqslant \limsup b_n \leqslant \limsup a_n$$

Důkaz. Pokud b_n je vybrána z a_n pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je
$$\{b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\} \subset \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$
Tedy
$$\sup(\{b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\}) \leqslant \sup(\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\})$$
Pak ale
$$\inf_n (\sup(\{b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\})) \leqslant \inf_n (\sup(\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}))$$
a tedy, dle Tvrzení 5(i) je
$$\limsup b_n \leqslant \limsup a_n.$$
Analogicky dokážeme, že
$$\liminf a_n \leqslant \liminf b_n.$$

□

Důsledek 1 (Věta o limitě vybrané podposloupnosti)**.** Pokud $\lim a_n = L$ a b_n je posloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pak je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Důkaz. Pokud

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Pak

$$\limsup a_n = \liminf a_n = L$$

a tedy dle předchozí věty je

$$\liminf b_n = \limsup b_n = L$$

A tedy dle tvrzení 5(iii) je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

□

Z důsledku vyplývá, že pokud jsme schopni z posloupnosti vybrat podposloupnosti mající různé limity pak původní posloupnost limitu nemá (pokud by měla, museli by se jí obě limity vybraných posloupností rovnat).

Definice 13 (Bolzano-Cauchyho podmínka)**.** Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje *Bolzano-Cauchyho* podmínku, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geqslant n_0)|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 13 (Úplnost reálných čísel)**.** *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je reálná posloupnost. Pak* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentní, právě když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku.*

Důkaz. Ukážeme nejprve implikaci "$\Rightarrow$". Pokud

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R},$$

pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$a_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(L) \quad \forall n \geqslant n_0.$$

tedy z trojúhelníkové nerovnosti je pro všechna $k, l > n_0$

$$|a_l - a_k| \leqslant |a_l - L| + |a_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy a_n splňuje B-C podmínku. Zbývá ukázat opačnou implikaci.

"$\Leftarrow$": Pozorujme, že splnuje-li BC podmínku pak je omezená. Stačí ukázat, že

$$\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}\,.$$

Pro spor předpokládejme, že existuje $\varepsilon > 0$ že

$$\liminf a_n + \varepsilon < L < \limsup a_n - \varepsilon$$

pak

$$\sup\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\dots\} - \varepsilon > L > \inf\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\dots\} + \varepsilon \quad (\forall n_0 \in \mathbb{N}).$$

Tedy najdeme $k, l > n_0$, že

$$a_k > L + \varepsilon \wedge a_l < L - \varepsilon$$

a tedy

$$|a_k - a_l| > 2\varepsilon > \varepsilon.$$

□

Poznámka 3. Někdy se reálná čísla zavádí nikoliv pomocí axiomu existence suprema, ale pomocí úplnosti (tedy vlastnosti, že každá posloupnost splňující BC podmínku je konvergentní). Oba přístupy vedou ke stejným výsledkům.

Věta 14 (zavedení Eulerova čísla)**.** *Posloupnost*

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je konvergentní. Eulerovo číslo pak zavádíme předpisem

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Lemma 2 (Bernoulliova nerovnost)**.** Nechť $x \in (-1, \infty)$ a k je přirozené číslo, pak platí

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx. \tag{4}$$

Důkaz. Jednoduché cvičení na matematickou indukci. □

Důkaz Věty 14. Nejprve ukážeme, že posloupnost x_n je neklesající. Stačí ukázat, že

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Vydělením nerovnosti výrazem $(1 + 1/n)^{n+1}$ a drobnou úpravou dostaneme

$$\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Použijeme-li elementární úpravy v kombinaci s Bernoulliovou nerovností dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\geqslant 1 + (n+1)\frac{-1}{(n+1)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}},
\end{aligned}$$

(kde v první nerovnosti jsme použili nerovnost (4) s $x = \frac{-1}{(n+1)^2}$ a $k = n + 1$). Jako cvičení ověřte, že $\frac{-1}{(n+1)^2} \in (-1, \infty)$ pro všechna $n \geqslant 1$.

Dále ukážeme, že posloupnost je omezená. Položme

$$y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Zřejmě $y_n \geqslant x_n$. K omezenosti x_n stačí tedy ukázat, že y_n je klesající. Stačí ukázat, že pro každé n přirozené je

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

což je ekvivalentní s

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Pomocí elementárního odhadu a Bernouliovy nerovnosti (viz. (4) s $x = \frac{1}{(n+1)^2}$ a $k = n + 1$) dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\geqslant 1 + (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Tedy $x_n \leqslant y_n \leqslant y_1 = 8$. Protože x_n je monotónní pak má limitu $L \in \mathbb{R}^*$ dle věty 11. Protože je ale omezená, je $L \in \mathbb{R}$ a tedy posloupnost je konvergentní. $\square$

Následující věta je diskrétní analogií L'Hospitalova pravidla (místo na podíl derivací se problém převede na podíl diferencí).

Věta 15 (Stolzova věta)**.** *Nechť x_n, y_n jsou reálné posloupnosti, y_n je rostoucí a nechť*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

existuje-li limita napravo.

Důkaz. Nechť limita vpravo existuje. Označme

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Bez ujmy na obecnosti nechť $L \geqslant 0$ (jinak bychom místo x_n/y_n ukázali pro posloupnost $(-x_n)/y_n$ a zbytek bychom dostali z linearity limity). Pro $n > k > 0$ je

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_k + \sum_{j=k}^{n-1}(x_{j+1} - x_j)}{y_k + \sum_{j=k}^{n-1}(y_{j+1} - y_j)} =: \frac{x_k + s_{n,k}}{y_k + t_{n,k}}. \tag{5}$$

Poslední výraz je roven výrazu

$$\frac{\frac{x_k}{t_{n,k}} + \frac{s_{n,k}}{t_{n,k}}}{\frac{y_k}{t_{n,k}} + 1}.$$

Vol $\varepsilon > 0$. Existuje k tak, že

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{y_{j+1} - y_j} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(L) \quad (\forall j \geqslant k).$$

Pak ale pro všechna $n > k$ přirozená je

$$\frac{s_{n,k}}{t_{n,k}} = \frac{\sum_{j=k}^{n-1}(x_{j+1} - x_j)}{\sum_{j=k}^{n-1}(y_{j+1} - y_j)} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(L).$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ pevné je

$$t_{n,k} \to \infty.$$

Tedy pro libovolné $\delta > 0$ a pevně zvolené k existuje n přirozené tak, že

$$\left|\frac{x_k}{t_{n,k}}\right| < \delta \wedge \left|\frac{y_k}{t_{n,k}}\right| < \delta.$$

Tedy z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\frac{L - \frac{\varepsilon}{2} - \delta}{1 + \delta} \leqslant \frac{\frac{x_k}{t_{n,k}} + \frac{s_{n,k}}{t_{n,k}}}{\frac{y_k}{t_{n,k}} + 1} \leqslant \frac{L + \frac{\varepsilon}{2} + \delta}{1 - \delta}$$

Pokud $L \in \langle 0, \infty)$ pak zvolíme-li

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2(1 + L + \varepsilon)},$$

dostaneme

$$L - \varepsilon \leqslant \frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{x_k}{t_{n,k}} + \frac{s_{n,k}}{t_{n,k}}}{\frac{y_k}{t_{n,k}} + 1} \leqslant L + \varepsilon.$$

Případ $L = \infty$ promyslete samostatně jako cvičení. $\square$

4.2. Nekonečné sumy.

Definice 14 (Součet a konvergence nekonečné sumy)**.** Nekonečnou sumou definujeme jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} s_k,$$

kde

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n.$$

Řekneme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konverguje, konverguje-li posloupnost částečných součtů s_k. *konverguje*, konverguje-li suma částečných součtů.

Věta 16 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konverguje. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Návod: Ukažte, že pokud neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pak posloupnost částečných součtů nesplňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku. □

Následující věty budou zatím uvedeny bez důkazu. Důkazy těchto vět pak najdeme v seckci věnované řadám. Prozatím je potřebujeme pouze k zavedení exponenciální funkce.

Tvrzení 6 (O absolutní konvergenci)**.** *Pokud*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

je konvergentní pak i

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

je konvergentní.

Tvrzení 7 (Srovnávací kritérium)**.** *Nechť* a_n, b_n *jsou nezáporné reálné posloupnosti a* $a_n \leqslant b_n$. *Pak*

(i) *Pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní pak i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je divergentní.*

(ii) *Pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní pak i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní.*

Tvrzení 8. (i) *Nechť* $|q| \in \langle 0, 1)$ *pak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(ii) *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

je konvergentní pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

4.3. **Příklady k procvičení.**

1. Z definice spočtěte následující limity, případně zdůvodněte proč neexistují
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{100n^2 + 100000}{n^3 + 1}$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 10n + 1}$$

5.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n+1}}$$

6.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2^n + 3n} - \sqrt{2^n - n^2}$$

7.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3^n + 2^{2n+1}}{4^{n+1} + 10n.2^n}$$

8.
$$\lim_{n\to\infty} n^3 - 100n^2 - 1,0001^n$$

9.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 0,1^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4} + \frac{1}{4^n}}$$

10.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 10n + 2}{\sum_{k=1}^{2n} k}$$

11.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n + 3 - 3^{n+1}}{3^{n-1} + n^{100}}$$

12.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + 3^n}{n^3 + 2n + 1}$$

13.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3^n + 1}}{(-2)^n - n^3 + 1000}$$

14.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3} + \binom{n+1}{3}}{n^4 + 1}$$

15.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 + 2n - 1} - \sqrt{n^3 - n}$$

16.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{n^2+1}\right)}$$

17.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3^{n+2} - 1}}{\sqrt[3]{4^n + 3} + 5}$$

18.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(5^n + n^5)}{\log(n^2 + 2^n + 10^n)}$$
19.
$$\lim_{n\to\infty} \sin(n!) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
20.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + 2^n.n^5}{3^n + n^{12} + 2^{n+1}}$$
21.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2^n + n} - \sqrt{2^n - n}}{\sqrt{3^n + n^2} - \sqrt{3^n - 2n + 2}}$$
22.
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(-1)^n$$
23. Nalezněte posloupnost a_n tak, že a_{2n} ani a_{2n+1} nemají limitu.
24. Nalezněte posloupnost z které lze vybrat posloupnost konvergující k 0 a ∞
25. Nalezněte posloupnost z které lze vybrat rostoucí a klesající podposloupnost
26. Nalezněte posloupnost z které lze vybrat podposloupnost konvergující k libovolnému číslu v intervalu $(0, 1)$
27.
$$\lim_{n\to\infty} \sin(n)$$
28. V závislosti na parametru $k \in \mathbb{N}$ spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$
Návod: použijte Stolzovu větu.
29. Nalezněte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$
30. Ukažte, že pokud a_n je konvergentní pak i
$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
je konvergentní a má stejnou limitu jako a_n.
31. * Nalezněte posloupnost, jejímiž hromadnými body jsou všechna reálná čísla.
32. ** Ukažte, že množina hromadných bodů posloupnousti $(\cos(n))_{n=1}^{\infty}$ je interval $\langle -1, 1\rangle$.

5. Limita funkce

V následujícím textu je vhodné definovat si pojem *prstencového okolí bodu.* Máme-li $x \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon > 0$ pak je

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$$

Definice 15 (Limita funkce)**.** Nechť $L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu L, jestliže f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a a platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in \mathcal{P}_\delta(x) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(L).$$

Tento fakt zapisujeme předpisem

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Tvrzení 9 (Jednoznačnost limity)**.** *Nechť $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na prstencovém okolí (resp. jednostranném prstencovém okolí) bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Pak funkce f má v tomto bodě maximálně jednu limitu (resp. max jednu limitu zprava a max. jednu limitu zleva).*

Důkaz. Dokazuje se stejně jako v případě posloupnosti. □

Příklad 22. (i)

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{neexistuje.}$$

(iii)

$$\lim_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

Definice 16 (limes superior a limes inferior)**.** Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}^*$ pak položíme

$$\limsup_{x \to a} f(x) := \inf_{\delta > 0} \left[\sup\left(f(\mathcal{P}_\delta(a))\right)\right]$$

a podobně

$$\liminf_{x \to a} f(x) := \sup_{\delta > 0} \left[\inf(f(\mathcal{P}_\delta(x)))\right]$$

Pozorování 4. (i)

$$\liminf_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x)$$

(ii) Limita funkce v bodě a existuje právě když

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \liminf_{x \to a} f(x)$$

Věta 17 (O aritmetice limit)**.** *Nechť f, g jsou reálné funkce definovány na nějakém prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí*

(i)

$$\lim_{x \to a\pm} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a\pm} f(x) + \lim_{x \to a\pm} g(x)$$

(ii)

$$\lim_{x \to a\pm} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to a\pm} f(x)$$

(iii)

$$\lim_{x \to a\pm} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a\pm} f(x) \cdot \lim_{x \to a\pm} g(x)$$

(iv)

$$\lim_{x \to a\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a\pm} f(x)}{\lim_{x \to a\pm} g(x)},$$

Mají-li výrazy napravo smysl (limity existují a příslušná operace je definována).

Důkaz. Označme

$$F := \lim_{x\to a\pm} f(x) \quad \text{a} \quad G := \lim_{x\to a(\pm)} g(x). \tag{6}$$

(i): Vol $\varepsilon > 0$ pak díky Lemma 1 existuje $\eta > 0$ tak, že

$$U_\eta(F) + U_\eta(G) \subset U_\varepsilon(F+G)$$

Z (6) existuje $\delta > 0$ tak, že

$$f(x) \in U_\eta(F) \wedge g(x) \in U_\eta(G) \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta^{(\pm)}.$$

Tedy platí, že

$$f(x) + g(x) \in U_\varepsilon(F+G) \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta^{(\pm)}.$$

(iii) Podobně jako prve. Vol $\varepsilon > 0$. Díky Lemma 1 existuje $\eta > 0$ tak, že

$$U_\eta(F).U_\eta(G) \subset U_\varepsilon(F.G)$$

Z (6) existuje $\delta > 0$ tak, že

$$f(x) \in U_\eta(F) \wedge g(x) \in U_\eta(G) \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta^{(\pm)}.$$

A tedy

$$f(x).g(x) \in U_\varepsilon(F.G) \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta^{(\pm)}.$$

Podobně pro (iv). (ii) plyne ihned z (iii) položíme-li $g(x) := \alpha$. □

Věta 18 (o sevřené funkci)**.** *Nechť f, g, h jsou funkce definované na jednostranném prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}$ (pravém nebo levém). Nechť na tomto okolí platí nerovnosti*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Pak

(i) *Pokud* $\lim_{x\to a\pm} f(x) = \infty$ *pak i* $\lim_{x\to a\pm} g(x) = \infty$
(ii) *Pokud* $\lim_{x\to a\pm} h(x) = -\infty$ *pak i* $\lim_{x\to a\pm} g(x) = -\infty$
(iii) *Pokud* $\lim_{x\to a\pm} f(x) = \lim_{x\to a\pm} h(x) = L$, *pak* $\lim_{x\to a\pm} g(x) = L$

Důkaz. Ukáže se úplně stejně jako věta o dvou policajtech pro posloupnosti. □

Věta 19 (Heineho věta)**.** *Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Pak je ekvivalentní*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = L$;
(ii) *Pro každou posloupnost $x_n \to a$ takovou, že $x_n \neq a$ platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Důkaz. (i)⇒(ii): Buď x_n posloupnost s limitou $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = a$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že

$$f(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(L)$$

Pro toto δ existuje n_0 tak, že

$$x_n \in \mathcal{P}_\delta(a) \quad \forall n \geqslant n_0$$

Tedy

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(L) \quad \forall n \geqslant n_0$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Opačnou implikaci dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že neplatí (i). Tedy pro existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta > 0$ je

$$f(\mathcal{P}_\delta(a)) \setminus U_\varepsilon(L)$$

Tedy pro každé n přirozené je

$$f(\mathcal{P}_{2^{-n}}(a)) \setminus U_\varepsilon(L)$$

neprázdná množina. Zvolme posloupnost x_n tak, aby

$$x_n \in \mathcal{P}_{2^{-n}}(a) \wedge f(x_n) \notin U_\varepsilon(L)$$

Pak $x_n \to a$ ale

$$\neg\,(f(x_n) \to L)\,.$$

□

Definice 17 (Spojitost funkce v bodě). (i) Řekneme, že reálná funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ pokud

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

(ii) Řekneme, že funkce f je spojitá na množině A pokud je spojitá ve všech bodech této množiny.
(iii) Podobně, řekneme, že funkce f je spojitá zprava (resp. zleva) v bodě a) pokud

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$$

(iv) Řekneme, že *funkce* f *je spojitá*, jestliže je spojitá na celém svém definičním oboru.

Pozorování 5. Funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

Značení 2. Třídu funkcí spojitých na množině A značíme symbolem $\mathcal{C}(A)$.

Věta 20 (O limitě složené funkce). *Nechť platí*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

dále nechť je

$$\lim_{x\to b} f(x) = L$$

Pak je

$$\lim_{x\to a} f \circ g(x) = L$$

Je li splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:
(a) f *je spojitá v bodě* b.
(b) $g(x) \neq b$ *na nějakém prstencovém okolí bodu* a

Důkaz. Necht je splněna podmínka (a). Vol $\varepsilon > 0$ pak díky spojitosti f v bodě b existuje $\eta > 0$ tak, že

$$f(U_\eta(b)) \subset U_\varepsilon(L).$$

Pro toto η existuje $\delta > 0$ tak, že

$$g(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset U_\eta(b)$$

Pak ale platí

$$f(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(L)$$

a tedy

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L.$$

Nechť naopak je splněna podmínka (b). Vol $\varepsilon > 0$. Existuje $\eta > 0$, že Existuje $\delta_1 > 0$ takové, že

$$g(x) \neq b \quad \forall x \in \mathcal{P}_{\delta_1}\,.$$

Teď protože funkce g má v a limitu b existuje η_2 tak, že

$$g(x) \in U_{\delta_2} \quad \forall x \in \mathcal{P}_{\delta_2}$$

pak ale

$$g(x) \in \mathcal{P}_\eta(b) \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta(a),$$

kde

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Tedy
$$f(g(\mathcal{P}_\delta(a))) \subset U_\varepsilon(L).$$
$\square$

Definice 18 (Zavedení exponenciální funkce)**.** Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkci
$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Definice je korektní protože suma napravo konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, jak bylo dokázáno v Tvrzení 8

Věta 21 (Vlastnosti exponenciály)**.** *Pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

(i)
$$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$$

(ii)
$$\exp(x) \geqslant x+1$$

(iii)
$$\exp(1) = e$$

(iv) *Funkce* exp *je rostoucí na* $\mathbb{R}$ *a*
$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \text{ a } \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

(v) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Důkaz. Máme
$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(x+y)^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^k y^{j-k} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \\
&\overset{l=j-k}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{n} \frac{y^l}{l!} - \sum_{k+l>n, k,l\leqslant n} \frac{x^k y^l}{k!l!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \\
&= \exp x \cdot \exp(y) + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) - \sum_{k+j>n, k,j<n} \frac{x^k y^j}{k!j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Tedy zvolíme-li $\varepsilon > 0$ najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\begin{aligned}
|\exp(x+y) - \exp(x).\exp(y)| &\leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right| + \left| \sum_{k+j>n, k,j<n} \frac{x^k y^j}{k!j!} \right| + \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right| + \frac{n^2 \max\{|x|, |y|\}^{2n}}{n!} + \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ můžeme zvoli libovolně malé, máme
$$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y).$$

(ii) Dokážeme později.
(iii) Máme

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\right| &= \left|\sum_{j=0}^{n} n^{-j}\binom{n}{j}-\frac{1}{j!}\right| \\ &= \left|\sum_{j=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)-n^j}{j!n^j}\right| \\ &= \left|\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\cdot\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)-n^j}{n^j}\right| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{j(j-1)\dots(j-k)n^{j-k}}{j!n^j} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=2}^{j}\frac{1}{(j-k)!n^{k-1}} \\ &\leqslant \frac{2}{n}\end{aligned}$$

Zvolíme-li n dost velké, je výraz libovolně malý, tedy

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} = \exp(1).$$

(v): Z (i) máme

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x).\exp(-x)$$

Tedy

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

(iv) Z definice je vidět, že funkce $x \mapsto \exp(x)$ je rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$. Pokud$x_1 < x_2 \leqslant 0$ pak

$$\exp(-x_2) < \exp(-x_1).$$

protože $0 \leqslant -x_2 < -x_1$. A tedy

$$\exp(x_1) = \frac{1}{\exp(-x_1)} < \frac{1}{\exp(-x_2)} = \exp(x_2)$$

a tedy funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0\rangle$. □

Definice 19 (Goniometrické funkce)**.** Nechť $\alpha \in [0, 2\pi)$. Nechť $A_\alpha \in \mathbb{R}^2$ je bod na jednotkové kružnici takový, že jeho spojnice s bodem $[0, 0]$ svírá úhel α s osou x.

(i) Definujeme

$$\cos\alpha := (A_\alpha)_x$$

(ii)

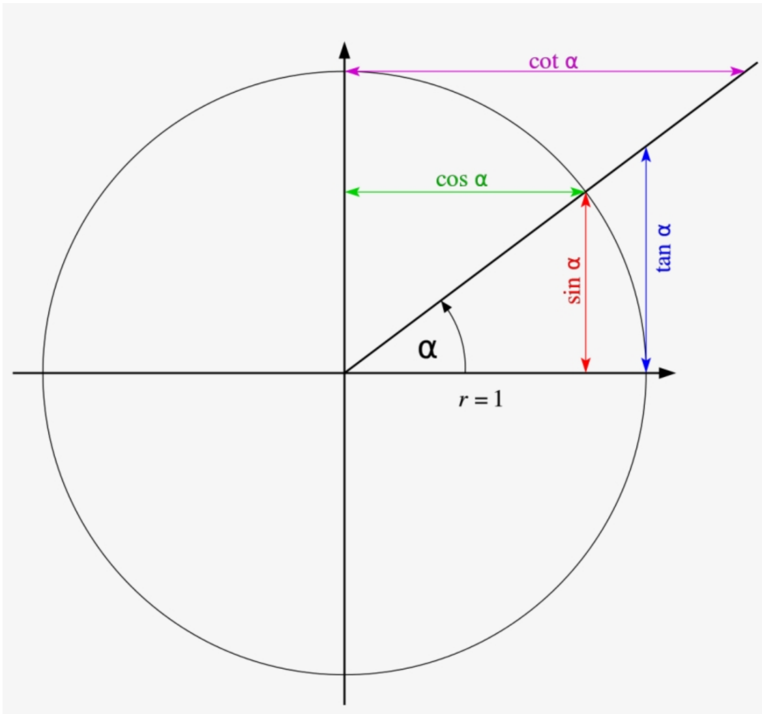
$$\sin\alpha = (A_\alpha)_y$$

(iii)

$$\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(iv)

$$\cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



Věta 22 (Vlastnosti goniometrických funkcí). (i) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
(ii) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
(iii) $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
(iv) *Funkce* $\sin, \cos$ *jsou* π*-antiperiodické.*
(v)

$$|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Důkaz. Vyjdeme z faktu, že rotace o úhel α je lineární zobrazení. Označíme li rotaci v kladném smyslu (proti směru pohybu hodinových ručiček) o úhel α symbolem R_α, dostaneme pro libovolné dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$ a $a \in \mathbb{R}$

$$R_\alpha(u+v) = R_\alpha u + R_\alpha v \quad R_\alpha(au) = aR_\alpha u$$

Snadno nahlédneme, že

$$R_\alpha((1,0)) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \wedge \quad R_\alpha((0,1)) = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Proto

$$\begin{aligned}
(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) &= R_{\alpha+\beta}((1,0)) \\
&= R_\alpha(R_\beta(1,0)) \\
&= R_\alpha((\cos\beta, \sin\beta)) \\
&= R_\alpha(\cos\beta(1,0) + \sin\beta(0,1)) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha).
\end{aligned}$$

a tedy

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \wedge \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

(ii) je vidět z obrázku u definice.
(iii) je vidět z obrázku u definice.

(iv) Z faktu, že nejkratší spojnice dvou bodů je úsečka a Pythagorovy věty vyplývá

$$|\sin\alpha| = |[\cos\alpha, \sin\alpha] - [\cos\alpha, 0]| \leqslant |[\cos\alpha, \sin\alpha] - (1,0)| \leqslant |\alpha|.$$

□

Cvičení 5. Odvoďte z předchozího vzorce, či přímo z definice

(i) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
(ii) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
(iii) $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

Věta 23 (charakterizace spojitosti)**.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) f *je spojitá.*
(ii) *Pro všechny body* x_n *z def. oboru* f *platí. Pokud* $x_n \to x \in D_f$ *pak* $f(x_n) \to f(x)$
(iii) *Pro všechna* $a < b$ *je* $f^{-1}((a,b))$ *otevřená podmnožina* D_f*.*

Důkaz. (i)$\Rightarrow$ (ii) Vol $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in U_\delta(A) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

Pokud $x_n \in D_f$ pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U_\delta(a)$ pro všechna $n \geqslant n_0$. Pak ale je $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(a))$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

(ii)$\Rightarrow$(iii): Stačí ukázat, že doplněk je uzavřená množina. Máme

$$f^{-1}(D_f \setminus (a,b)) = D_f \setminus f^{-1}((a,b))$$

Z (ii) ale plyne, že

$$x_n \in D_f \setminus f^{-1}((a,b)) \Leftrightarrow (f(x_n) \leqslant a) \vee (f(x_n) \geqslant b)$$

Pak ale z podmínky (ii) plyne, že pokud $x_n \to x$ pak

$$f(x) \leqslant b \vee f(x) \geqslant b$$

a tedy

$$f^{-1}(D_f \setminus (a,b))$$

je uzavřená. (iii)$\Rightarrow$(i): Není-li f spojitá pak existuje $x \in D_f$ tak, že existuje $\varepsilon > 0$, že $\forall \delta > 0$ existuje $y \in U_\delta(x)$ tak, že $f(y) \notin U_\varepsilon(f(x))$. Pak ale množina

$$f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$$

není otevřená a tedy (iii) neplatí. □

Pozorování 6. Funkce je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$x \in U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Důkaz. □

Věta 24 (Základní limity)**.** (i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Definice 20 (obecná mocnina a logaritmus)**.** (i) Funkce $\ln x$ je definována na intervalu $(0,\infty)$ jako funkce iverzní k funkci $\exp x$.

(ii) Pro $a \in (0,\infty)$ definujeme funkci a^x jako

$$a^x := \exp(\ln a.x)$$

(iii) Funkci $\log_a(x) := (a^x)^{-1}$.

Cvičení 6. Ukažte, že pokud f, g jsou spojité pak

(i) $f + g$ je spojitá;
(ii) $f.g$ je spojitá;
(iii) $f \circ g$ je spojitá
(iv) pokud navíc g nenabývá hodnoty 0 je $\frac{f}{g}$ spojitá.

(v) Je-li $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá prostá funkce na intervalu I pak je funkce f^{-1} spojitá na intervalu $f(I)$.

Důkaz. Pokud

$$\lim_{x \to a} f(x) = F = f(a), \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) = G = g(a)$$

pak dle věty o aritmetice limit je (i) $f(a) + g(a) = \lim_{x \to a}(f + g)(x)$ dále (ii)$f(a).g(a) = \lim_{x \to a}(f.g)(x)$, podobnbně pro (iv). Dle věty o limitě složené funkce je

$$f(g(x)) = \lim_{y \to g(a)} f(y) = \lim_{x \to a} f(g(x)).$$

□

Věta 25 (O spojitosti základních funkcí)**.** *Funkce* $a^x, \sin x, x^\alpha, \cos x, \tan x, \cot x, \arctan x, \arcsin x, \arccos x$ *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že funkce exp, sin jsou spojité.

Vol $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon$. Pak je $x \in U_\delta$ je

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= \left|2 \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\ &\leqslant 2 \left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\ &\leqslant |x - a| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

kde předposlední nerovnost dostáváme aplikací věty 22(v).

Pojďme dokázat spojitost funkce $x \mapsto \exp(x)$. Máme pokud $x \in U_\delta(a)$ pak $x = a + h$ kde $|h| < \delta$. Zvolíme-li

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2e^a},$$

dostaneme

$$|e^{a+h} - e^x| = e^a \left|\frac{e^h - 1}{h} h\right| \leqslant e^a.2|h| \leqslant \varepsilon$$

a tedy $e^x \in U_\varepsilon(a)$, jakmile $x \in U_\delta(x)$. A tudíž $\exp(x)$ je spojitá.

Vol $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := \varepsilon$. Pak je $x \in U_\delta$ je

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= \left|2 \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\ &\leqslant 2 \left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\ &\leqslant |x - a| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

kde předposlední nerovnost dostáváme aplikací věty 22(v).

Máme pokud $x \in U_\delta(a)$ pak $x = a + h$ kde $|h| < \delta$. Zvolíme-li

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2e^a}$$

dostaneme

$$|e^x - e^a| = |e^{a+h} - e^a| = e^a \left|\frac{e^h - 1}{h} h\right| \leqslant e^a.2|h| \leqslant \varepsilon$$

a tedy $e^x \in U_\varepsilon(a)$, jakmile $x \in U_\delta(x)$.

Pro exponenciální funkci o základu $a \in (0, \infty)$ je

$$a^x = \exp \circ (\ln(a)x).$$

Jedná se tedy složení dvou spojitých funkcí, což je opět spojitá funkce. A tedy $x \mapsto a^x$ je spojitá. Dále funkce $\ln x$ je inverzní funkcí k exp a tedy je spojitá. Dále pro $x > 0$ je

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

tedy funkce je spojitá. Dále je

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

což znamená, že funkce cosinus vznikne složením dvou spojitých funkcí a je tedy spojitá.

Dále

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

tedy dle předchozího pozorování je tangens podílem dvou spojitých funkcí a tedy spojitá funkce. Funkce $\arcsin, \arccos, \arctan$ jsou inverzními funkce ke spojitým funkcím na intervalech, tedy také spojité funkce.

$\square$

5.1. **Příklady k procvičení.** Spočtěte limity následujících funkcí, v případě, že neexistují alespoň jednostranné limity, pokud ani tyto neexistují dokažte to.

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x+6}{(3x^3-2x)}$$
2.
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$$
3.
$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x^3+3x^2-3x-9}$$
4.
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{x-2}$$
5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\sqrt{1+1/x}$$
6.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$
7.
$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$$
8.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x^3}$$
9.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{x}$$
10.
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-5^x}{x^2}$$
11. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(e^{2x-1}-5)}.$$
12. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{2^{x^2}-1}$$
13. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{x}{2}}}{2^{x^2+5}}$$
14. Nalezněte
$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$$

Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+7x+3}{x^2+5x+1}\right)^{x+3}.$$
15. *
$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{x}-1\right)$$
16. Nalezněte funkci, která je nespojitá v nekonečně mnoha bodech, ale ve všech bodech má limitu.
17. ** Ukažte že pokud je funkce nespojitá v nespočetně mnoha bodech, existuje bod, ve kterém nemá limitu.

Na základě znalosti Heineho věty spočtěte

16.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\sin(\frac{1}{n})}$$

17.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} + (-2^n)\right)}{(-2)^{-n}}$$

18.
$$\lim_{n\to\infty} (n^4+1)\ln(1+2^{-n})$$

19.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)^{n-3}$$

6. Spojitost a derivace funkce jedné proměnné

Lemma 3. Jestliže $x_n \in \mathbb{R}$ je omezená posloupnost, pak existuje posloupnost y_n vybraná z x_n konvergentní v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Z tvrzení 5(i) vyplývá existence limes superior. Označme

$$\overline{L} := \limsup x_n.$$

Limes superior je hromadným bodem posloupnosti x_n tedy existuje y_n vybraná z xn tak, že

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{L}.$$

Protože posloupnost je shora a zdola omezená konstantami m, M je

$$m \leqslant \overline{L} \leqslant M.$$

□

Věta 26 (O mezihodnotách)**.** *Nechť* f *je funkce spojitá na intervalu* I*. Nechť* $x_1 < x_2$ *a* $x_1, x_2 \in I$*. Necht* c *je hodnota mezi* $f(x_1)$ *a* $f(x_2)$*. Pak existuje* $\lambda \in (x_1, x_2)$ *takové, že*

$$f(\lambda) = c.$$

Poznámka 4. Nebo též ekvivalentně lze zapsat, že pokud $A \subset I$ je interval, pak $f(A)$ je také interval. Rozmyslete si, že obě tyto formulace říkají to samé.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti, nechť $f(x_1) < f(x_2)$. Označme

$$M_d := \{x \in (x_1, x_2) : f(x) < c\}.$$

Označme

$$S := \sup(M_d).$$

Platí $S \in (x_1, x_2)$. Dále vybereme klesající posloupnost $y_n \in (x_1, x_2)$ pak je

$$f(y_n) \geqslant c.$$

Dále vybereme posloupnost $x_n \in M_d$ tak, že $x_n \to S$. Pak je

$$\lim_n f(x_n) \leqslant c \wedge \lim_n f(y_n) \geqslant c$$

ze spojitosti f je

$$\lim_n f(x_n) = f(S) = \lim_n f(y_n).$$

tedy

$$f(S) = c.$$

□

Poznámka 5. V dřívějších dobách se pomocí vlastnosti nabývání mezihodnot definovala spojitost funkce. To by však připouštělo i spojitost funkce jako

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Tato funkce samozřejmě není dle nynější definice spojitá v nule. Vlastnosti nabývání mezihodnot se nyní říká *Darbouxova vlastnost.*

Definice 21 (Derivace funkce v bodě)**.** Nechť f je definována na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ pak *derivaci v bodě* a definujeme předpisem

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

derivace v bodě a zprava

$$f'_+(a) := \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a *derivace v bodě a zleva* předpisem

$$f'_-(a) := \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Dále řekneme, že *funkce* f *je v bodě a diferencovatelná*, jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ (tzn. existuje vlastní derivace).

Příklad 23. Je dána funkce

$$f(x) = |x|.$$

Pak je $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$. Tedy funkce není diferencovatelná v bodě 0. Pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ je

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

Tvrzení 10 (O spojitosti diferencovatelných funkcí)**.** *Nechť* f *je diferencovatelná v bodě* $a \in \mathbb{R}$. *Pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Vol $\varepsilon > 0$. Existuje $\eta > 0$ tak, že

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant |f'(a)| + 1 \quad \forall x \in \mathcal{P}_\eta(a).$$

Pak, položíme-li

$$\delta := \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{|f'(a)|+1}\right\},$$

máme

$$|f(x)-f(a)| \leqslant (|f'(a)|+1)|x-a| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta(a).$$

Tedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

A tedy funkce f je spojitá v bodě a. □

Věta 27 (O derivaci složené funkce)**.** *Nechť funkce* g *je definovaná na okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$. *Nechť dále* f *je defiována na nějakém okolí bodu* $f(a)$. *A* f, g *jsou diferencovatelné v bodě* $f(a)$ *resp.* a

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a)).g'(a)$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Necht $a \in \mathbb{R}$ je bod pro který je $g'(a) \neq 0$. Použijeme-li nejprve větu o aritmetice limit a posléze větu o limitě složené funkce s podmínkou (b)(pokud $g'(a) \neq 0$ je funkce na prstencovém okolí různá od $g(a)$), dostaneme

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) &= \lim_{y\to x} \frac{f(g(y))-f(g(a))}{y-a} \\
&= \lim_{y\to a} \frac{f(g(y))-f(g(a))}{g(y)-g(a)} \frac{g(y)-g(a)}{y-a} \\
&= g'(a). \lim_{y\to a} \frac{f(g(y))-f(g(a))}{g(y)-g(a)} \\
&= g'(a). \lim_{x\to g(a)} \frac{f(x)-f(g(a))}{x-g(a)} \\
&= g'(a).f'(g(a)).
\end{aligned}$$

V případě, že $g'(a) = 0$ pro malé $\delta > 0$ je

$$|y-a|(|f'g(a)|-\varepsilon) < |f(y)-f(g(a))| < |y-a|(|f'g(a)|+\varepsilon)$$

pro $y \in \mathcal{P}_\delta(g(a))$ tedy ze spojitosti g v bodě a existuje η tak, že pro $x \in \mathcal{P}_\eta(a)$ je $g(x) \in U_\delta(a)$ pokud $g(x) \in \mathcal{P}_\delta(g(a))$ je

$$|f\circ g(x) - f\circ g(a)| \leqslant |f'(g(a)) + \varepsilon|\,|g(x)-g(a)| \leqslant (|f'(g(a))| + \varepsilon)\varepsilon|x-a|$$

pokud $g(x) = g(a)$ odhad také platí a tedy

$$\left|\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}\right| \leqslant \varepsilon\,(f'(g(a)) + \varepsilon)$$

Protože ε lze zvolit libovolně malé je

$$(f \circ g)'(a) = 0 = g'(a).f'(g(a)).$$

□

Věta 28 (O aritmetice derivací)**.** *Nechť funkce* f, g *jsou definovány na okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Pak*

(i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
(ii) $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
(iii) $(cf)'(a) = cf'(a)$,
(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Mají-li výrazy napravo smysl. Tytéž rovnosti platí i pro derivace zprava respektive zleva.

Důkaz. (i) Dle věty o aritmetice limit je

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a}\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(ii) Použijeme li větu o aritmetice limit dostaneme

$$\begin{aligned}(f.g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)g(x) - f(x)g(a)}{x - a} + \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a}\right)\\ &= \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(iii) plyne z (ii) položíme-li $g = \alpha$.
(iv) Máme

$$f'(a) = \left(g \cdot \frac{f}{g}\right)'(a) = g'(a)\left(\frac{f}{g}\right)(a) + g(a)\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$$

tedy po úpravě

$$g(a)\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) - g'(a)\left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

z čehož dostaneme

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}.$$

□

Věta 29 (O derivaci inverzní funkce)**.** *Nechť* f *je funkce prostá na okolí* U *bodu* $a \in \mathbb{R}$. *Pak existuje* $g = (f|_U)^{-1}$ *a platí*

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Důkaz. Máme
$$f^{-1}(f(x)) = x$$
použijeme-li větu o limitě složené funkce a zderivujeme obě strany rovnosti dostaneme
$$f'(x)(f^{-1})'(f(x)) = 1$$
a tedy
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$
□

Věta 30 (derivace základních funkcí)**.** (i) $(\sin x)' = \cos x$
(ii) $(e^x)' = e^x$
(iii) $(\ln x)' = 1/x$
(iv) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
(v) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(vi) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(vii) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Důkaz. (i) Použitím věty o aritmetice limit spojitosti funkce cos, věty o limitě složené funkce a standardní limity dostaneme
$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\\ &= 2\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right). \lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\\ &= \cos x \lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\\ &= \cos x.\end{aligned}$$
(ii) Použitím věty o limitě složené funkce a standardní limity dostaneme
$$\begin{aligned}(e^x)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x-a}\\ &= e^a \lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}\\ &= e^a.\end{aligned}$$
(iii) Pro $x > 0$ existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že $x = e^t$ dle věty o derivaci inverzní funkce máme
$$\ln'(x) = \ln(e^t) = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}.$$
(iv) Obecně je mocninná funkce definována pouze pro kladná x (s výjimkou lichých odmocnin a celých mocnin). Pro tato kladná x můžeme zapsat
$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$
derivujeme-li takto složenou funkci dostaneme
$$(e^{\alpha\ln x})' = \alpha\frac{1}{x}e^{\alpha\ln x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$
Zbylé derivace budou dovozeny na cvičení. □

6.1. **Příklady k procvičení.**

1. Z definice spočtěte derivaci funkce $f(x) = x^2$.
2. Pomocí věty o derivaci složené funkce odvoďte vzorec pro derivaci inverzní funkce. *Návod: derivujte rovnost* $f^{-1} \circ f(x) = x$, *podle věty o derivaci složené funkce*
3. Pomocí vztahu z předchozího cvičení určete
   - $(\arctan x)'$
   - $(\ln x)'$
   - $(\arcsin x)'$
4. Spočtěte derivace následujících funkcí.

   (a)
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$$
   (b)
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+5}$$
   (c)
$$f(x) = 3^{\frac{x+1}{x+2}}$$
   (d)
$$f(x) := \log_x(x^2+1)$$
   (e)
$$f(x) = x\sqrt{x^2+1}$$
   (f)
$$f(x) = e^{2x} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
   (g)
$$f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
   (h)
$$f(x) := |x^2 - 3x + 2|$$
   (i)
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

   Tam, kde derivace neexistuje spočtěte z definice alespoň jednostranné derivace.
5. Nalezněte funkci, která nemá derivaci v žádném bodě svého definičního oboru.
6. Nalezněte funkci, která je v určitém boďe spojitá, ale není v něm diferencovatelná.
7. *Nalezněte funkci, která je spojitá, ale v nekonečně mnoha bodech nemá derivaci.
8. ** Nalezněte funkci, která je spojitá, ale nemá derivaci v žádném bodě.

7. Věty o střední hodnotě, l'Hospitalovo pravidlo, monotonie a extrémy funkcí jedné proměnné

Definice 22 (extrémy funkcí)**.** Řekneme, že *funkce* $f : M \to \mathbb{R}$ *nabývá v bodě* a *maxima (resp. minima) na množině* M, jestliže

$$f(x) \leqslant f(a) \forall x \in M \text{ resp. } f(x) \geqslant f(a) \forall x \in M$$

Řekneme, že *funkce* f *nabývá v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *loklního maxima (resp. minima)*, jestliže existuje okolí bodu a na kterém je $f(a)$ maximum (resp. minimum).

Věta 31 (O nabývání extrémů)**.** *Nechť funkce* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce na uzavřeném intervalu* I*. Pak funkce na tomto intervalu nabývá maxima a minima.*

Důkaz. Označme

$$M := \sup_{x \in I} f(x).$$

Existuje posloupnost $x_n \in I$ taková, že

$$f(x_n) \to M.$$

Z x_n lze vybrat konvergentní podposloupnost takovou, že $y_n \to a \in I$. Protože f je spojitá

$$f(y_n) \to f(a).$$

A tedy $f(a) = M$, což znamená, že v bodě $a \in I$ se nabývá maxima. Podobně lze ukázat, že funkce na I nabývá minima. □

Poznámka 6. Ve skutečnosti platí i obecnější tvrzení, množina I nemusí být interval, stačí uzavřená omezená množina. Tzn. množina taková, že z libovolné posloupnosti bodů z této množiny z ní můžeme vybrat konvergentní podposloupnost. Množinu s touto vlastností nazýváme *kompaktní množinou.*

Věta 32 (Rollova věta)**.** *Nechť* f *je diferencovatelná funkce definovaná na intervalu* $I = (a, b)$ *a spojitá na* $\langle a, b \rangle$*. Nechť dále* $f(a) = f(b)$ *pak existuje bod* $\lambda \in (a, b)$ *takový, že*

$$f'(\lambda) = 0.$$

Důkaz. Pokud je funkce na intervalu konstantní, pak je tvrzení pravdivé. Pokud není konstantní, pak existuje x tak, že buď

$$f(x) > f(a) \vee f(x) < f(a).$$

Necht bez újmy na obecnosti nastane první možnost. Označme $c \in (a, b)$ bod, ve kterém se nabývá maxima. Víme, že pa, že pro $a < x < c$ je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

a tedy $f'_-(c) \geqslant 0$. Dále pro $x < c$ je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0.$$

pro $b > x > c$ a tedy $f'_+(c) \leqslant 0$. Protože ale oboustranná derivace existuje je rovna jednostranným derivacím. Pak ale už nutně

$$f'(c) = 0.$$

□

Věta 33 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* f *je diferencovatelná funkce definovaná na intervalu* $I = (a, b)$ *a spojitá na* $\langle a, b \rangle$*. Pak existuje bod* $c \in (a, b)$ *pro který je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Definujme funkci

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Snadno ověříme, že $g(a) = g(b)$. Pak ale dle Rollovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$g'(c) = 0.$$

Pak ale

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Věta 34 (Cauchyova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* f, g *jsou diferencovatelná funkce definované na intervalu* $I = (a, b)$ *a spojité na* $\langle a, b\rangle$*. Nechť dále* $g(a) \neq g(b)$*. Pak existuje bod* $c \in (a, b)$ *takový, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Definujme funkci

$$h(x) := (f(b) - f(a))\,(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))\,(f(x) - f(a))$$

Pak je

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Funkce je navíc spojitá na $\langle a, b\rangle$ a diferencovatelná na intervalu (a, b). Dle Rollovy věty tedy existuje $c \in (a, b)$ tak, že $h'(c) = 0$. Tedy

$$h'(c) = (f(b) - f(a))\,g'(c) - (g(b) - g(a))\,f'(c) = 0$$

z čehož vyplývá, že pokud $g(b) - g(a) \neq 0$, pak

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Věta 35 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť* f, g *jsou reálné funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$*. Nechť dále* $\lim_{x\to a\pm} g(x) = \lim_{x\to a\pm} f(x) = 0$*. Pak platí*

$$\lim_{x\to a\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a\pm} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Existuje-li limita vpravo.

Důkaz. Budeme dokazovat pro případ limity zprava a $a \in \mathbb{R}$, ostatní se provedou analogicky. Rozšíříme spojitě (tedy nulou v bodě a) funkce f, g na F, G.

Vol $\delta > 0$, aby

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(L) \quad \forall x \in \mathcal{P}^+_\delta(a)$$

Pro $x \in \mathcal{P}^+_\delta(a)$ existuje dle Cauchyovy věty $c \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pak ale

$$\frac{F(x)}{G(x)} \in U_\varepsilon(L).$$

protože $c \in \mathcal{P}^+_\delta(a)$. A tedy dostáváme

$$\lim_{x\to a+} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

□

Definice 23 (Tečna ke grafu funkce)**.** Nechť f je funkce diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. *Tečnou ke grafu funkce v bodě a* rozumíme lineární funkci danou předpisem

$$t(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Věta 36 (O vztahu monotonie a znaménka derivace)**.** *Nechť f je funkce diferencovatelná na intervalu (a, b) a spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak platí*

(i) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f'(x) > 0$ pak f je rostoucí na intervalu $[a, b]$.*
(ii) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f'(x) \geqslant 0$ pak f je neklesající na intervalu $[a, b]$.*
(iii) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f'(x) < 0$ pak f je klesající na intervalu $[a, b]$.*
(iv) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f'(x) \leqslant 0$ pak f je nerostoucí na intervalu $[a, b]$.*

Důkaz. Dokážeme pouze (i) ostatní se dokážou analogicky. Budeme dokazovat nepřímo. Předpokládejme, že funkce f není rostoucí na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tedy existují $c, d \in \langle a, b\rangle$ tak, že $d > c$ a $f(d) \leqslant f(c)$. Funkce je spojitá na $\langle c, d\rangle$ a diferencovatelná na (c, d), tedy dle Lagrangeovy věty existuje $\eta \in (c, d)$ tak že

$$f'(\eta) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leqslant 0.$$

tedy neplatí, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. □

Tvrzení 11 (Nutná a postačující podmínka existence extrémů)**.** (i) *Nechť f má lokální extrém v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pokud v tomto bodě existuje derivace, pak už nutně $f'(a) = 0$.*
(ii) *Pokud $f'(a) = 0$ a zároveň $f''(a) \neq 0$, pak má funkce f v bodě a extrém.*

Důkaz. Pokud $f'(a) \neq 0$ pak nechť bez újmy na obecnosti je

$$f'(a) = c > 0$$

pak ale existuje δ tak, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{c}{2} \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta(a).$$

Pak ale je

$$f(x) < f(a) < f(y) \quad \forall x \in \mathcal{P}_\delta^- \quad y \in \mathcal{P}_\delta^+$$

Pak ale zjevně v bodě a nemůže být lok. minimum ani lok. maximum. □

8. Derivace vyšších řádů, monotonie, konvexnost a konkávnost funkcí

Definice 24 (derivace vyšších řádů)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$. n-tou derivaci definujeme induktivně předpisem

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})'.$$

Definice 25 (konvexnost, konkávnost funkce)**.** Řekneme, že funkce f je konvexní (resp. konkávní) na množině $M \subset \mathbb{R}$, jestliže

$$(\forall x, y \in M)(\forall \lambda \in (0, 1))f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

resp.

$$(\forall x, y \in M)(\forall \lambda \in (0, 1))f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Věta 37 (O vztahu konvexity a znaménka druhé derivace)**.** *Nechť f je funkce dvakrát diferencovatelná na intervalu (a, b) a spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak platí*

(i) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f''(x) > 0$ pak f je striktně konvexní na intervalu $[a, b]$.*
(ii) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f''(x) \geqslant 0$ pak f je konvexní na intervalu $[a, b]$.*
(iii) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f''(x) < 0$ pak f je striktně konkávní na intervalu $[a, b]$.*
(iv) *Pokud $(\forall x \in (a, b))f''(x) \leqslant 0$ pak f je konkávní na intervalu $[a, b]$.*

Důkaz. (i) Vol $x, y \in (a, b)$ a $z \in (x, y)$ pak

$$z = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y = \lambda x + (1-\lambda)y$$

Dle Lagrangeovy věty existují $c_1 \in (x, z)$ a $c_2 \in (z, y)$ tak, že

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \quad \text{a} \quad f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Protože f' je rostoucí funkce na intervalu (a, b) je $f'(c_1) < f'(c_2)$. Tedy

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

tedy

$$f(z)\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z}\right) \leqslant \frac{f(x)}{z-x} + \frac{f(y)}{y-z}$$

Po úpravě

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(z) \leqslant \frac{z-x}{y-x}f(x) + \frac{y-z}{y-x}f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Podobně se dokážou i (ii), (iii) a (iv). □

Tvrzení 12. *Nechť f je diferencovatelná funkce na intervalu (a, b). Pak f' má na tomto intervalu Darbouxovu vlastnost (nabývání mezihodnot).*

Definice 26 (asymptoty)**.** Nechť f je reálná funkce definovaná na okolí ∞ (resp. $-\infty$) řekneme, že lineární funkce

$$y(x) = ax + b$$

je asymtotou f v ∞ (resp. $-\infty$), jestliže platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - y(x) = 0 \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - y(x) = 0.$$

Tvrzení 13 (o tvaru asymptoty)**.** *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce definovaná na okolí $\pm\infty$. Funkce má v ∞ resp. $-\infty$ asymptotu, právě když existují vlastní limity*

$$a := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{resp.} \quad a := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

a

$$b := \lim_{x\to\infty} f(x) - ax \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax$$

v takovém případě je asymptota funkce f v ∞ resp. $-\infty$ ve tvaru

$$y = ax + b.$$

Příklad 24. Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \ln(2e^{2x} - x)$$

9. Vyšetřování průběhu funkcí

Vyšetřením průběhu funkce budeme rezumět

(i) Určení přirozeného definičního oboru funkce;
(ii) Zjištění zda je funkce sudá, lichá či periodická;
(iii) Určení limit (případně i jednostranných) v krajních bodech definičního oboru a bodech nespojitosti;
(iv) spočtení první derivace;
(v) určení maximálních intervalů monotonie dané funkce a určení lokálních a globálních extrémů;
(vi) spočtení druhé derivace funkce;
(vii) určení max. intervalů konvexity/konkávity dané funkce a inflexních bodů;
(viii) načrtnutí grafu funkce.

9.1. **Příklady k procvičení.**

(a) Vyšetřete průběhy následujících funkcí

- Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}\right).$$
- $$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$$
- $$f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$
- $$f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$$
- $$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x + 1}}$$

(b) Zkonstruujte tečnu a normálu ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ v bodě $a = 0$

10. Aplikace diferenciálního počtu

10.1. Asymtotická složitost výpočetních problémů.

Definice 27 (Landauovy symboly)**.** Buďte a_n, b_n posloupnosti. Řekneme, že

(i) posloupnost a_n je třídy $\mathcal{O}(b_n)$, píšeme
$$a_n \in \mathcal{O}(b_n),$$
jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a konstanta $C > 0$ taková, že
$$|a_n| \leqslant C b_n, \quad \forall n > n_0;$$

(ii) posloupnost a_n je třídy $o(b_n)$, píšeme
$$a_n \in o(b_n),$$
jestliže
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Věta 38. *Nechť* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *jsou posloupnosti. Nechť*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R},$$
pak $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$.

Důkaz. Nechť
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$$
pak existuje n_0 přirozené tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je
$$\frac{f(n)}{g(n)} < L + 1.$$
Položme
$$C_1 := L + 1$$
Pak $\forall n > n_0$ platí, že
$$f(n) \leqslant C g(n),$$
a tedy $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. □

Z předchozí věty ihned vyplývá, že pokud $f(n) \in o(g(n))$, pak i $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Abychom nemuseli v dalším textu zdlouhavě psát $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, budeme tento fakt často zapisovat jako
$$f(n) \lesssim g(n),$$
zatímco $f(n) \in o(g(n))$ jako
$$f(n) << g(n).$$
Pokud navíc $f(n) \lesssim g(n)$ a zároveň $g(n) \lesssim f(n)$, budeme tento fakt zapisovat jako $f(n) \approx g(n)$.

Cvičení 7. Ukažte, že $\log(n) << n$, pro $a > b > 0$ je $n^b << n^a$ a pro dva základy $a, b > 1$ je $\log_a(n) \approx \log_b(n)$.

Analogicky pro funkce definujeme

Definice 28. Buďte f, g funkce definované v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že

(i) funkce f je třídy $\mathcal{O}(g)$ pro $x \to a$, píšeme
$$f \in \mathcal{O}(g) \text{ pro } x \to a,$$
jestliže existuje $\delta > 0$ a konstanta $C > 0$ taková, že
$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta);$$

(ii) funkce f je třídy $o(g)$, píšeme

$$f \in o(g) \text{ pro } x \to a,$$

jestliže

$$\lim_{a \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Analogická bude i věta a důkaz:

Věta 39. *Nechť pro* $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $M \subset \mathbb{R}$, $M \supset (a - \delta, a + \delta)$ *a* $f, g : M \to \mathbb{R}$ *jsou funkce. Nechť*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R},$$

pak $f \in \mathcal{O}(g)$.

10.1.1. *Odhady složitosti algoritmů a problémů, P a NP problémy.* Ukažme si teď několik aplikací právě nabitých poznatků a pojďme si ukázat několik konkrétních odhadů složitostí algoritmů a problémů.

Definice 29. Řekneme, že algoritmus je třídy $\Theta(f(n))$ pokud pro "nejhorší možná data" (existují taková data), že počet operací potřebný ke zpracování těchto dat (značme $A(n)$) platí

$$f(n) \lesssim A(n)$$

a zároveň pro libovolná data velikosti n je

$$A(n) \lesssim f(n)$$

Řekneme, že problém je třídy $\Theta(f(n))$, jestliže existuje algoritmus třídy $\Theta(f(n))$, který ho řeší a zároveň neexistuje žádný algoritmus, který by problém řešil a měl asymptoticky lepší složitost.

Příklad 25. Máme pole s n údaji, z nichž každý je opatřen klíčem. Chceme toto pole setřídit dle velikosti klíče. Ukažte, že tento problém je třídy $\mathcal{O}(n^2)$

Řešení. Popišme nejprve algoritmus, který problém řeší a pak teprve odhadneme počet kroků. Následujícímu algoritmu se říká bubble sort- neboli bublinkové třídění.

(1)Pro $i = 1$ až n dělej
(2)   Pro $j = 1$ až $n - j$ dělej
(3)   Pokud $k(j) > k(j + 1)$ pak
(4)   Prohoď záznamy v buňce j a $j + 1$

Nahlédněte proč algoritmus funguje a zkuste si ho odsimulovat na jednoduchých datech. Vnější cyklus se prochází n-krát. Během prvního průchodu se $n - 1$-krát projde vnitřní cyklus. Při druhém průchodu už jen $n - 2$-krát. Celkově se tedy vnitřní cyklus projde

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} - \text{krát}$$

tedy maximálně s ověřováním podmínek, hlídáním cyklů a i kdybychom museli pokaždé prohazovat máme

$$\frac{3}{2} n(n-1) + n \in \mathcal{O}(n^2)$$

operací. Algoritmus je minimálně tedy třídy $\Theta(n^2)$. □

Cvičení 8. Zkuste najít nějaký jiný rozumný algoritmus třídy nejhůře $\Theta(n^2)$, který řeší předchozí úlohu.

Existují samozřejmě i lepší algoritmy, které jsou třídy $\Theta(n \log_2(n))$ (např. Heap sort či Merge sort). Zvídavého čtenáře odkazuji na pěknou knihu [2]. Tyto algoritmy zde nebudeme v plné šíři popisovat, na přednášce si pouze načrtneme jak fungují a naznačíme odhad složitosti. Poněkud těžší otázkou je: Existují i lepší algoritmy, nebo je toto nejlepší asymptotická složitost jakou můžeme dostat?

Věta 40 (O složitosti problému třídění)**.** *Problém třídění je třídy* $\Theta(n \log n)$

Náznak důkazu. Jak už jsme uvedli dříve algoritmy jako Heap sort nebo Merge sort jsou požadované třídy, zbývá tedy ukázat, že není možné zkonstruovat asymptoticky lepší algoritmus. Pole které dostaneme k setřídění může mít celkem $n!$ možností jak může být uspořádáno podle velikosti. Abychom ho mohli srovnat musíme tedy rozpoznat jaká z těchto $n!$ permutací to může být. K tomu abychom mohli toto rozpoznat potřebujeme vstřebat alespoň

$$\log_2(n!)$$

bitů informací. Z odhadů dříve dokázaných máme

$$\log_2(n!) \geqslant \log_2(n^{\frac{n}{2}}) = \frac{n}{2}\log_2(n).$$

Vidíme tedy, že toto nelze provést v čase asymptoticky lepším než $n \log n$. □

Tento čas je pro počítač (nemáme-li skutečně mamutí data) pořád ještě stravitelný. Ale jsou i složitější problémy a algoritmy. Např. násobení matic $n \times n$ neumíme provést ani v kvadratickém čase. Vypustíme-li na tento problém klasický algoritmus, který pouze postupuje dle definice dostaneme n^3. Algoritmus lze ještě trochu asymptoticky vylepšit použitím rekurze. Jeho složiost bude ale stále výrazně hoší než n^2. Pořád je to však problém polynomiální složitosti. Pojďme si tento pojem definovat přesněji.

Definice 30 (Třída P)**.** Řekneme, že problém je třídy P, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ a algoritmus třídy $\Theta(n^k)$, který tento problém řeší.

Známým problémem, který u kterého se neví zda je třídy P, je problém obchodního cestujícího. Obchodní cestující má navštívit celkem n měst. Má k dispozici tabulku vzdáleností mezi městy, přitom by chtěl naplánovat cestu tak, aby byla co nekratší. Pochopitelně nás napadne hloupý algoritmus který zkouší všechny permutace a počítá k nim délku cesty. Takovýto algoritmus by měl asymptotickou složitost $n \cdot n!$. Existují však i mnohem chytřejší algoritmy využívající dynamické programování, které pracují v čase $n^2 \cdot 2^n$. O mnoho lepší algoritmy nejsou známy. Ví se však, že problém je třídy NP, což je třída problémů, u kterých jsme v polynomiálním čase schopni ověřit správnost výsledku. Jedním z nejznámějších matematických problémů současnosti je rozhodnout zda platí $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Pokud by vás napadlo řešení, sepište ho a běžte ihned na oddělení vědy a výzkumu. Dostanete odměnu 1 000 000$.

Studenti, kteří by měli hlubší zájem o studium správnosti a složitosti algoritmů odkazuji na [3, 1].

Příklad 26. (i)

10.2. **Taylorův polynom a přibližný výpočet funkčních hodnot.** Lokálně (tzn. na okolí nějakého bodu) se dá dostatečně hladká (existují derivace do určitého stupně) funkce aproximovat polynomem. Aby byla aproximace co nejúčinější a hodnoty polynomu nejlépe odpovídaly hodnotě dané funkce, je třeba, aby se polynom s danou funkcí shodoval ve funkční hodnotě a v hodnotách příslušných derivací. Polynom, který se shoduje s funkcí f v derivacích až do řádu n v bodě a nazveme Taylorovým polynomem funkce f v bodě a stupně n. Formálně definujme následovně.

Definice 31 (Taylorův polynom)**.** Nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}(M \subset \mathbb{R})$ je $n\times$ diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak *Taylorovým polynomem stupně* n *funkce* f *v bodě a* rozumíme polynom

$$T^n_{f,a}(x) := f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Cvičení 9. Ověřte, že derivace polynomu definovaného v definici se skutečně shodují s derivacemi funkce f až do řádu n.

Cvičení 10. Ukažte, že pro funkci f, která je $n\times$ diferencovatelná v bodě a platí

$$\left(T^n_{f,a}\right)' = T^{n-1}_{f',a}$$

Věta 41 (Taylorova věta)**.** *Nechť* f *je n-krát diferencovatelná funkce v bodě* $a \in \mathbb{R}$*. Pak je*

$$f - T^n_{f,a}(x) \in o(|x-a|^n) \text{ pro } x \to a.$$

Důkaz. Budeme dokazovat

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^n_{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{7}$$

Použijeme důkaz matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

a odtud (7). Pro $n \geqslant 2$ máme ze spojitosti f v a a cvičení 9

$$\lim_{x\to a} f(x) - T^n_{f,a}(x) = 0$$

Použijeme L'Hospitalovo pravidlo, cvičení 10 a indukční předpoklad k úpravě a důkazu (7)

$$\frac{f'(x) - \left(T^n_{f,a}(x)\right)'}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{f'(x) - T^{n-1}_{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}}$$

$\square$

Příklad 27. Dosaďme do Taylorova polynomu funkce sinus $y = x^2$

$$T^3_{\sin,0}(y) = y - \frac{y^3}{6}$$

Dostaneme

$$T^3_{\sin,0}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6}$$

Z Taylorovy věty a věty o limitě složené funkce plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - T^3_{\sin,0}(x^2)}{x^6} = 0$$

Pokud bychom měli k dispozici obrácenou Taylorovu větu, usoudili bychom odtud, že Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x^2)$ je

$$T^6_{f,0}(x) = x^2 - \frac{x^6}{6}$$

a odtud bychom odvodili

$$f^{(6)}(0) = -\frac{1}{6}, f^{(5)}(0) = 0, \dots$$

Přeformulujeme Taylorovu větu, tak aby obsahovala v příkladě potřebnou obrácenou větu.

Věta 42. *Nechť* f *je n-krát diferencovatelná funkce v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *a* P *je polynom stupně nejvýše* n*. Pak je*

$$f - P \in o(|x-a|^n) \text{ pro } x \to a.$$

právě když $P = T^n_{f,a}$.

V důkazu využijeme následující cvičení.

Cvičení 11. Nechť pro $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a funkci f definovanou v okolí bodu a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} = 0$$

Pak je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a je-li f spojitá v bodě a, je $f(a) = 0$.

Důkaz. Jednou z implikací je Taylorova věta. Dokažme opačnou implikaci. Nechť P je polynom splňující předpoklady věty. Pak pro polynom $Q = P - T^n_{f,a}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{8}$$

Polynom Q vyjádříme ve tvaru

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

a sporem dokážeme, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pokud to neplatí, existuje $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$, že $a_j \neq 0$ a

$$Q(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k (x-a)^k$$

Pak lze (8) upravit na

$$\lim_{x \to a} \frac{\sum_{k=j}^{n} a_j (x-a)^{k-j}}{(x-a)^{n-j}} = 0$$

a ze cvičení 11 plyne $a_j = 0$, což je spor. Odtud plyne $Q = 0$ a tedy $P = T^n_{f,a}$. □

Cvičení 12. Použijte větu k nalezení Taylorova polynomu $T^6_{f,0}$ funkce $f(x) = \exp(2x^2 - x^3)$ a Taylorova polynomu $T^6_{g,0}$ funkce $g(x) = \cos(x + 3x^2)$. Uvědomte si, že pro $m > n$ a polynomy

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \\ Q(x) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k \end{aligned}$$

platí

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Cvičení 13. Použijte větu k výpočtu derivací $g^{(6)}(0)$, $g^{(7)}(0)$, $g^{(8)}(0)$ funkce z předchozího cvičení.

Věta 43 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť funkce* $f : M \to \mathbb{R}$ *(*$M \subset \mathbb{R}$*) je* $(n+1)\times$ *diferencovatelná na* $\langle a, z)$. *Označme*

$$R^n_{f,a}(x) := f(x) - T^n_{f,a}(x)$$

Pak existuje bod $\eta \in \langle a, z)$ *tak, že*

$$R^n_{f,a}(z) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(z-a)^{(n+1)}$$

Důsledek 2. Velikost zbytku lze odhadnout nerovností

$$\left| R^n_{f,a}(x) \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

kde $M = \sup_{y \in (a,x)} |f^{n+1}(y)|$.

Cvičení 14. Ukažte, že za předpokladů věty o Lagrangeově tvaru zbytku pro $z \in M$ a funkci

$$F(t) = (z-a)^{n+1} R^n_{f,a}(t) - (t-a)^{n+1} R^n_{f,a}(z)$$

platí

$$F(z) = 0 \qquad F(a) = 0 \qquad F^{(n+1)}(t) = (z-a)^{n+1} f^{n+1}(t) - (n+1)!\, R^n_{f,a}(z)$$

$$F^{(k)}(a) = 0 \text{ pro } k \in \mathbb{N}, k \leqslant n$$

Důkaz. Na základě cvičení 14 použijeme na funkci F z tohoto cvičení $n+1$-krát Rolleovu větu. Dostaneme existenci $\eta \in \langle a, z)$ splňující

$$0 = F^{(n+1)}(\eta) = (z-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\eta) - (n+1)!\, R^{(n)}_{f,a}(z)$$

a odtud tvrzení věty. □

Příklad 28. Bez použití kalkulačky či jiné výpočetní techniky spočtěte hodnoty $\sqrt{3}, \pi, \sin(0.8)$ s přesností 10^{-5}.

10.3. **Rekurentní posloupnosti.** V některých případech budeme mít posloupnost, která není zadána explicitním předpisem (přímá závislost na n), ale bude záviset na předchozích členech. Uvažme například splátkový kalendář. Na začátku si dlužník pujčí D korun. Každý rok dlužník zaplatí nějakou fixní částku S nadruhou stranu se jistina kterou dluží zvýší o úrok (vynásobí se číslem $u > 1$). Tedy hodnota jistiny v $n+1$. roce splácení se dá spočítat jako

$$a_{n+1} = u.a_n - S.$$

V některých případech můžeme snadno najít explicitní předpis. Konkrétně v tomto případě je to

$$a_n = D.u^n - S\frac{u^n - 1}{u - 1}. \tag{9}$$

Toto byl poměrně jednoduchý příklad. Dalším známým příkladem je Fibonacciho posloupnost, se kterou přišel Fibonacci ve spisu.... která popisuje množení se králíků v čase. Pokud máme jednoleté a dvouleté králíky a každý pár má v jednom roce pár potomků. Na začátku máme jeden jedno-letý pár. Označíme-li počet jednoletých párů v n-tém roce jako F_n dostaneme

$$\begin{aligned} F_0 &= 0,\\ F_1 &= 1,\\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n. \end{aligned} \tag{10}$$

U této rovnice už není explicitní předpis na první pohled vidět, ačkoliv se pořád nechá najít a pokud už ho máme je snadné zkontrolovat pomocí indukce že funguje (viz cvičení...)

Obecně máme zadanou rekurentní rovnici k-tého řádu zadanou předpisem

$$x_{n+k} = F(n, x_n, x_{n+1}, \dots x_{n+k}), \tag{11}$$

přičemž máme zadány členy $a_0, a_1, \dots a_{k-1}$. Protože však zatím nejsme, tak daleko, abychom mohli tento problém v plné obecnosti řešit uvažujme speciální případ, kdy je rekurentní vztah ve tvaru

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{12}$$

přičemž x_0 je zadáno.

Definice 32 (Atraktory, pevné body)**.** Nechť $f : \Omega \subset\to \mathbb{R}$ je funkce a označme

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$$

kde x_n je limita rekurentní funkce zadané vztahem (12) s počáteční podmínkou

$$x_0 = x.$$

(i) Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *pevným bodem rovnice* (12) pokud

$$A = f(A)$$

(ii) Řekneme, že A je *lokálním atraktorem rovnice* pokud

$$\varphi(x) = A$$

na nějakém okolí A.

Věta 44 (Nutná podmínka konvergence rekurentní posloupnosti)**.** *Nechť x_n je posloupnost zadaná předpisem* (12) *a F je spojitá funkce. Nechť dále*

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$$

A je pevným bodem (12).

Důkaz. Zřejmě dle věty o limitě podposloupnosti (viz důsledek 1) a Heineho větě, je

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(A).$$

□

Příklad 29. Nalezněte limitu posloupnosti zadané rekurentně

$$x_0 = 3, \quad x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$$

Funkce

$$F(x) = \sqrt{2+x}$$

je spojitá a tedy pokud limita $A \in \mathbb{R}$ existuje pak musí být

$$A = \sqrt{2+A}.$$

Řešením rovnice dostaneme, že pokud limita existuje, pak je rovna buď -1 nebo 2. Všimněme si, že pokud $x_n > 2$ pak $x_n > x_{n+1} > 2$. Tedy posloupnost je klesají zdola omezená dvojkou, tudíž konvergentní a limita musí být 2.

Příklad 30. Navrhněte rekurentní posloupnost konvergentní k $\sqrt[3]{3}$, tak aby počáteční členy byly přirozená čísla a koeficienty v rekurentní rovnici byla též přirozená čísla a aby rychlost konvergence byla exponenciání, tzn.

$$(\exists k > 1)|a_n - \sqrt[3]{3}| \in O(k^{-n})$$

řešení. Definujme

$$t_0 := 1, \quad t_{n+1} := t_n + \frac{3(\frac{1}{3} - n - 1)(t_n - t_{n-1})}{n+1}$$

Pak tato posloupnost má požadovanou vlastnost. □

10.4. **Newtonova metoda tečen.** V této části bude naším úkolem nalézt řešení obecné úlohy

$$f(x) = 0, \tag{13}$$

kde f je nějaká "dostatčně hladká" funkce (existují konečné derivace až do určitého řádu). Analyticky tzn. přesně umíme danou úlohu řešit jenom pro velmi speciální případy (např. když f je polynom maximělně 4. stupně (podotkněme, že i v tomto řešení se skrývá jistý podvod, neboť spočítat odmocninu tzn. vyjádřit ji v desítkové soustavě také umíme pouze přibližně)). Proto bychom rádi uměli určit kořen rovnice (13), v rozumném čase alespoň přibližně.

Definice 33 (Aproximační posloupnost)**.** Nechť $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce diferencovatelná na okolí bodu a. *Newtonovou aproximační posloupností v bodě* a nazveme posloupnost x_n definovanou rekurentně předpisem

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{14}$$

Věta 45 (O konvergenci Newtonovy metody)**.** *Nechť má funkce* f *ve svém kořeni* x *nenulovou derivaci* $f'(x)$ *a v okolí bodu* x *omezenou druhou derivaci. Pak existuje okolí* $U(x)$ *bodu* x *takové, že pro všechna* $a \in U(x)$ *posloupnost 14 konverguje k bodu* x.

K důkazu věty použijeme

Věta 46 (o lokálním atraktoru)**.** *Nechť* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má ve svém pevném bodě* $A \in \Omega$ *spojitou derivaci splňující* $|f'(A)| < 1$. *Pak je bod* A *lokálním atraktorem funkce (tj. rovnice* $f(x) = x$*).*

Důkaz. Označme $r = |f'(A)|$. Ze spojitosti f' v bodě A plyne existence okolí $U(A)$, na němž pro $q = (1+r)/2 < 1$ platí $|f'(x)| < q$. Odtud a z Lagrangeovy věty o střední hodnotě pak pro $x, y \in U(A)$ plyne $|f(x) - f(y)| < q|x - y|$ a speciálně pro $y = A$ platí $|f(x) - A| < |x - A|$. Zvolme $x_0 \in U(A)$, pak z předchozího plyne $x_1 = f(x_0) \in U(A)$, $x_2 = f(x_1) \in U(A)$ a $|x_2 - x_1| < q|x_1 - x_0|$. Podobně pro další členy posloupnosti

$$x_n = f(x_{n-1})$$

plyne $x_n \in U(A)$ a $|x_n - x_{n-1}| < q^{n-1}|x_1 - x_0|$. Odtud pak snadno plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ je Cauchyovská a tedy i konvergentní. Zbývá ukázat, že limitou této posloupnosti je bod A. To plyne z $|x_n - A| < q^{n-1}|x_0 - A|$ (LÉPE OZDROJOVAT VZTAHY VÝŠE). □

Důkaz. Z existence derivace $f''(x)$ plyne spojitost $f'(x)$ a tedy i nenulovost f' na dostatečně malém okolí bodu x – označme ho $U(x)$. Vztah 14 tedy pro $x_n \in U(x)$ definuje x_{n+1}. Větu o lokálním atraktoru použijeme na funkci $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, kde $g'(x) = f(x)f''(x)/(f'(x))^2 = 0$ v případě f'' spojité v bodě x. V případě předpokladů naší věty (tedy lokální omezenost f'') bude důkaz obdobný jako u věty o lokálním atraktoru. □

10.5. **Optimalizační úlohy ve fyzice a geometrii.**

10.6. **Cvičení.**

1. Chceme zkonstruovat pohár ve tvaru kužele tak, aby se na jeho výrobu spotřebovalo co nejméně materiálu. Jaké má mít rozměry (tzn. poloměr podstavy a výšku), aby se při požadovaném objemu spotřebovalo co nejméně materiálu?
2. Dělostřelci mají dostřelit co nejdále do nepřátelského území. Jaký mají zvolit úhel náměru hlavně tak, aby se jim podařilo dostřelit co nejdále?
3. Kotel v palírně má tvar válce. Potřebujeme 1000 litrový kotel. Jaké má mít nádoba rozměry, chceme-li při její koupi ušetřit maximum na materiálu.
4. Dvě lodě plují konstantními rychlostmi u, v po přímých trasách svírajících úhel θ. Určete nejmenší vzdálenost na kterou se přiblíží, jestliže v určitý okamžik byly vzdáleny od průsečíku tras po řadě a, b.
5. * V řece Leně se topí člověk, který je od potenciálního zachránce, který stojí přímo na břehu ve směru po proudu vzdálen 150m a je ve vzdálenosti 50m od břehu. Navrhněte trasu, po které musí zachránce běžet a posléze plavat, tak aby byl u tonoucího co nejrychleji, víme-li, že běží max. rychlostí $8ms^{-1}$ zatímco plave rychlostí $1ms^{-1}$ a rychlost proudu je $0,5ms^{-1}$. (předpokládejme, že řeka je na tomto úseku rovná).
6. Z obdélníkového kartonu o rozměrech $55cm \times 65cm$ chceme vyrobit krabici tak, že v rozích vystříhneme čtverce a krabici pak ohneme a složíme z ní kvádr. Jak velké čtverce máme vystříhnout, aby měl výsledný kvádr maximální objem?
7. Aproximujte hodnotu $\arctan 2$ s přesností 10^{-6}.
8. Aproximujte hodnotu $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ s přesností 10^{-5}.
9. Posloupnost je definována rekurentně předpisem
$$a_{n+1} = \sin(a_n)$$
Nalezněte limitu v závislosti na prvním členu posloupnosti $a_0 \in \mathbb{R}$.
10. Rekurentní posloupnost je zadána předpisem
$$a_{n+1} := \frac{1}{1 + a_n} \quad a_0 = 1$$
Spočtěte její limitu.
11. * Ukažte, že pokud $x > 1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ pak rekurentní posloupnost daná předpisem
$$x_0 = 1 \quad x_{n+1} = x_n + \frac{x(\alpha - n - 1)(x_n - x_{n-1})}{n+1}$$
konverguje k x^α. A navíc
$$x^\alpha - x_n \in O((n!)^{-1}).$$

11. Soustavy rovnic

11.1. Gaussova eliminační metoda.

11.2. Lineární zobrazení a jejich reprezentace.

12. Primitivní funkce

Definice 34 (Primitivní funkce)**.** Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí k f* na intervalu (a, b), jestliže

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Symbolicky zapisujeme tento fakt jako

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Poznámka 7. Narozdíl od derivace, která je od každé funkce pouze jedna existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí z zadané funkci. Stačí uvažovat o konstantu posunuté funkce. Následující věta ukazuje, že žádné jiné funkce než tyto o konstantu se lišící neexistují.

Věta 47 (O integrační konstantě)**.** *Nechť F, G jsou primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Dokážeme nepřímo. Nechť $R(x) := F(x) - G(x)$ není konstantní na (a, b) pak existují $c < d$, $c, d \in (a, b)$ tak , že

$$R(c) \neq R(d)$$

pak dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\eta \in (c, d)$ tak, že

$$R'(\eta) = \frac{R(d) - R(c)}{d - c} \neq 0$$

pak ale $F'(\eta) \neq G'(\eta)$ tedy F, G nemůžou být primitivními funkcemi stejné funkce. □

Věta 48 (Integrace základních funkcí)**.** *Platí*

(i)
$$\int \sin x \, d\,x = -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(ii)
$$\int \cos x \, d\,x = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iii)
$$\int e^x \, d\,x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iv) *Pro* $a > 0$ *je*
$$\int a^x \, d\,x = \frac{a^x}{\ln a}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(v) *Pro* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *je*
$$\int x^\alpha \, d\,x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

(vi)
$$\int \frac{d\,x}{x} = \ln x \quad x \in (0, \infty).$$

(vii)
$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1)$$

(viii)
$$\int \frac{d\,x}{1 + x^2} = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Důkaz provedeme derivací pravých stran. Použijeme-li základní tabulku derivací zjistíme, že funkce na levo jsou derivací pravé strany. Tedy funkce napravo jsou na daném intervalu jejich neurčitým integrálem. □

Věta 49 (Linearita integrálu)**.** *Pro libovolné* f, g *integrovatelné na* (a, b) *a libovolné* $\alpha \in \mathbb{R}$ *platí:*

(i) $\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
(ii) $\int \alpha f(x) d = \alpha \int f(x) dx$.

Důkaz. Označme
$$F(x) := \int f \, dx, G(x) := \int g \, dx$$
Pak je dle věty o aritmetice derivací
$$(F(x) + G(x))' = (F(x))' + (G(x))' = f(x) + g(x)$$
a
$$(\alpha F(x))' = \alpha (F(x))' = \alpha f(x).$$
Tím je věta dokázána. □

Věta 50 (o substituci)**.** *Nechť* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *je diferencovatelná funkce. Nechť* F *je primitivní funkce k* f *na intervalu* $I \supset y(a, b)$*. Pak*
$$F \circ y$$
je primitivní funkce k funkci
$$y'.(f \circ y)$$
na intervalu (a, b)*. Což lze zapsat symbolicky jako*
$$\int f(y(x)) y'(x) dx = F(y(x)) + c.$$

Důkaz. Dle věty o derivaci složené funkce je
$$(F(y(x) + c))' = F'(y(x)).y'(x) = f(y(x)).y'(x).$$
tedy
$$\int f(y(x)) y'(x) dx = F(y(x)) + c.$$
□

Poznámka 8. Z historických důvodů budeme často používat značení
$$y'(x) = \frac{d\,y}{d\,x}$$
a se symboly $d\,x$ a $d\,y$ budeme zacházet jakožto s diferenciály (nekonečne malými změnami x a y). Věta o substituci se dá zapsat jako
$$\int f(y(x)) y'(x) \, d\,x = \int f(y(x)) \frac{d\,y}{d\,x} \, d\,x = \int f(y) \, d\,y$$

Důsledek 3 (Lineární substituce)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f má primitivní funkci na a, b pak je
$$\int f(ax + b) \, d\,x = \frac{F(ax + b)}{a}.$$

Věta 51 (metoda Per partes)**.** *Nechť* F *je primitivní funkce k* f *na intervalu* (a, b) *a nechť* g *je diferencovatelná funkce na* (a, b)*. Pak je*
$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$
pro určitý intergál platí
$$\int_a^b f(x) dx = [Fg]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx$$

Důkaz. Z věty o derivaci součinu, je

$$(F(x)g(x))' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

z čehož

$$\int f(x)g(x) + F(x)g'(x)\, \mathrm{d}\, x = F(x)g(x)$$

a tedy z linearity integrálu dostaneme

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Podobně pro určitý integrál. □

13. Integrace racionálních funkcí, vybrané standardní substituce

Racionální funkcí rozumíme funkci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P, Q jsou polynomy. Parciálními zlomky pak rozumíme funkce, které jsou buď tvaru

$$\frac{1}{(x+a)^n} \quad a \in \mathbb{R}$$

a nebo

$$\frac{x+b}{(x^2+cx+d)^n}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \quad c^2 - 4d < 0.$$

13.1. **Integrace parciálních zlomků.** Nejprve si uvědomme, že první typ parciálních zlomků zintegrujeme snadno pomocí lin. substituce a dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+c)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x+c)^{n-1}}$$

Dále druhý typ rozložíme na součet dvou integrálů

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}\mathrm{d}x + \frac{2d-c}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+cx+d}$$

První integrál dostaneme substitucí $y = x^2 + cx + d$ ten druhý pak pomocí vhodné lineární substituce převedeme na integrál typu.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Pokud $n = 1$ jsme hotovi pokud ne, použijeme (opakovaně, je li to třeba) rekurentního vzorce

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2n(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

Věta 52 (Rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $\deg(P) < \deg(Q)$. *Pak existují parciální zlomky* $r_1, \dots, r_n$ *tak, že*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i(x).$$

Předchozí věta nám neříká, jak rozklad najít, pouze garantuje jeho existenci. K jeho nalezení použijeme následující algoritmus. Dostaneme-li libovolnou funkci tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Algoritmus 1 (Rozklad na parciální zlomky)**.** Krok 1: Pokud $\deg(P) \geqslant \deg(G)$, pak vydělíme polynom P polynomem Q a integrujeme $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \tilde{P}(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$

Krok 2: Zintegrujeme $\int \tilde{P}(x)dx$

Krok 3: Nalezme kořeny polynomu Q. Polynom Q zapíšeme jako součin ireducibilních polynomů tzn. ve tvaru

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(a_i x + b_i)^{j_i} \prod_{i=1}^{l}(c_i x^2 + d_i x + e_i)^{m_i}$$

kde $j_i, m_i \in \mathbb{N} \setminus 0$ a $d_i^2 - 4c_i e_i < 0$

Krok 4: Funkci $\frac{R(x)}{Q(x)}$ zapíšeme jako součet

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{j_i} \frac{q_{i,k}}{(a_i x + b_i)^k} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{r_{i_k} x + s_{i,k}}{(c_i x^2 + d_i x + e_i)^k}$$

Krok 5: Spočítáme čísla $q_{i,k}, r_{i,k}, s_{i,k}$. Vyřešením příslušné soustavy lineárních rovnic.

Krok 6: Zintegrujeme příslušné parciální zlomky a výsledek sečteme.

V dalších případech elementárních funkcí postupujeme tak, že je nejprve převedeme vhodnou standardní substitucí na racionální funkci a pak zintegrujeme.

Poznámka 9. Nemůžeme očekávat, že budeme schopni zintegrovat libovolnou elementární funkci. Narozdíl od derivování v případě integrace nemusí platit, že primitivní funkce k elementární funkci je opět elementární funkce. Typickým příkladem je funkce e^{x^2}, která nemá elementární primitivní funkci. Důkaz tohoto tvrzení však přesahuje naše současné možnosti.

13.2. **Standardní substituce.** V dalším textu budeme symbolem $R(x, y)$ rozumět racionální funkci proměnných x a y.

(i) $\int R(e^x)dx$ subsituujeme $y = e^x$. Pak je $d\,x = \frac{d\,y}{y}$

(ii) $\int R(\sin x, \cos x)dx$
- Pokud $R(x, -y) = R(x, y)$ pak substituujeme $y = \sin x$
- Pokud $R(-x, y) = -R(x, y)$ pak $y = \cos x$
- Pokud $R(-x, -y) = R(x, y)$ pak $y = \tan x$, pak je $d\,x = \frac{d\,y}{1+y^2}$
- Pokud nevyjde ani jedna z předešlých možností zbývá poslední zoufalá možnost $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(iii) $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ substituujeme $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

(iv) $\int R(x, \sqrt{x^2 + bx + c})dx$ Pokud $b^2 - 4c < 0$, substituujeme $y + x = \sqrt{x^2 + bx + c}$.

(v) $\int R(x, \sqrt{-x^2 + bx + c})dx$ Pokud $b^2 - 4c < 0$, substituujeme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy + \sqrt{c}$

Poznámka 10. Substituce fungují často na omezených intervalech, což ale nemusí nutně znamenat, že primitivní funkce neexistuje na širším intervalu, než na kterém funguje substituce. Pro nalezení primitivní funkce je pak klíčové následující lemma.

Lemma 4 (O lepení primitivních funkcí)**.** Nechť $a < b < c$ a f je spojitá funkce na intervalu (a, c). Nechť F_1 je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b) a F_2 je primitivn í funkcí k f na intervalu (b, c) a nechť

$$\lim_{x\to b-} F_1(x) = \lim_{x\to b+} F_2(x) = L.$$

Pak funkce definovaná předpisem

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{pro } x \in (a, b) \\ L & \text{pro } x = b \\ F_2(x) & \text{pro } x \in (b, c), \end{cases}$$

je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, c).

Důkaz. Nejpre pokud $x \in (a, b)$ pak je $F'(x) = F_1'(x) = f(x)$. Podobně, je $F'(x) = F_2'(x) = f(x)$ pokud $x \in (b, c)$. Zbývá tedy ukázat, že $F'(b) = f(b)$. Máme

$$F'_-(b) = \lim_{x \to b-} \frac{F(x) - L}{x - b} = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{1} = f(b),$$

kde v rovnosti jsme použili L'hospitalovo pravidlo. Použijeme-li stejným způsobem L'hospitalova pravidla při výpočtu $F'_+(b)$ dostaneme $F'(b) = f(b)$ a tedy tvrzení platí. □

13.3. **Příklady k procvičení.**

1.
$$\int 2x^5 + 3x^2 - 2x + 1 dx$$
2.
$$\int \frac{dx}{2x+5}$$
3.
$$\int x 2^{3x^2+5}\, dx$$
4.
$$\int e^x \sin(2x)\, dx$$
5.
$$\int e^{2x} x\, dx$$
6.
$$\int \arctan x\, dx$$
7.
$$\int \frac{x}{1-x^2}\, dx$$
8.
$$\int \sin^3 x\, dx$$
9.
$$\int \frac{dx}{1+x+x^2}$$
10.
$$\int \frac{3x+5}{1+2x^2}\, dx$$
11.
$$\int \arcsin x\, dx$$
12.
$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx$$
13.
$$\int x^2 e^{-2x}\, dx$$
14.
$$\int \sin^2 x\, dx$$
15.
$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$$
16.
$$\int \frac{x^2+3x+5}{x^2-3x+2}\, dx$$
17.
$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$$
18.
$$\int \frac{x^5+1}{(x^2+2x+2)^2}\, dx$$
19.
$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{1+e^x+e^{2x}}\, dx$$

20.
$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+\sin x}$$
21.
$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos x}$$
22.
$$\int \frac{1+\cos^4 x}{1+2\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$$
23.
$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2-2x}}$$
24.
$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$$
25.
$$\int x\sqrt[3]{3x+5}-2x^2\,\mathrm{d}\,x$$
26.
$$\int \sqrt{5x^2-3x+2}\,\mathrm{d}\,x$$
27. Spočtěte
$$\int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+1}\mathrm{d}x$$
28. Vhodnou substitucí převeďte na integrál racionální funkce
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\cos^4 x}.$$
29. Vhodnou substitucí převeďte na integrál racionální funkce
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$
30. Nalezněte
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(2x)}$$
31. Spočtěte
$$\int \frac{\sqrt{4x+1}}{x+1}\mathrm{d}x$$
32. Nalezněte
$$\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{e^{2x}}\mathrm{d}x$$
33. Spočtěte
$$\int \frac{x+1}{x^3-1}\mathrm{d}x.$$
34. Pomocí vhodné substituce převeďte na integrál racionální funkce
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-3x-4}}\mathrm{d}x.$$

14. Určitý integrál, Riemannův integrál

Definice 35 (Určitý Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) pak definujeme

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

Má-li výraz vpravo smysl. Pokud je jeho hodnota reálná říkáme, že *určitý integrál konverguje.*

Věta 53 (O střední hodnotě)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu a, b a nechť*

$$\int_a^b f(x)dx$$

konverguje. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Poznámka 11.

Definice 36 (Riemannův integrál)**.** Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujme její *horní Riemmanův součet* předpisem

$$\mathcal{H}_a^b f := \inf_{(x_i) \in \Delta} \sum_i \sup_{x \in (x_i, x_{i+1})} f(x)(x_{i+1} - x_i),$$

kde infimum na pravé straně se bere přes všechna dělení intervalu (a, b). Dále definujme *dolní Riemmanův součet* předpisem

$$\mathcal{D}_a^b f := \sup_{(x_i) \in \Delta} \sum_i \inf_{x \in (x_i, x_{i+1})} f(x)(x_{i+1} - x_i).$$

Pokud platí

$$\mathcal{D}_a^b f = \mathcal{H}_a^b f$$

řekneme, že funkce f je *Rieamannovsky integrovatelná na* (a, b) což píšeme symbolicky $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a položíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)dx := \mathcal{D}_a^b f$$

Definice 37 (norma dělení)**.** Normou dělení $(x_i)_{i=1}^k$ kde x_i je dělení intervalu (a, b) budeme rozumět

$$\nu(x_i) := \max |x_{i+1} - x_i|.$$

Poznámka 12 (Historická)**.** Riemannův integrál byl původně definován jako

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)dx := \lim_{\nu(x_i) \to 0} \sum_i f(\eta_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde η_i je libovolný bod intervalu $(x_i.x_{i+1}$ a $\nu(x_i)$ je norma dělení (tzn. velikost největšího intervalu (x_i, x_{i+1})).

Tvrzení 14 (stejnoměrná spojitost)**.** *Pokud f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak pro všechny $x, y \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \tag{15}$$

Důkaz. Nechť závěr tvrzení neplatí. Pak exituje $\varepsilon > 0$ a $x_n, y_n \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$|x_n - y_n| < 2^{-n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$$

z posloupnosti x_n vybereme konvergentní posloupnost $z_n \to z \in \langle a, b \rangle$ Pak v každé okolí z nalezneme body x_n, y_n tak, že

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

tedy funkce f není spojitá v bodě z. □

Věta 54 (Integrovatelnost spojitých funkcí)**.** *Nechť* f *je spojitá funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,d\,x$$

konverguje.(tedy existuje a je konečný).

Důkaz. Funkce f je na $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně spojitá. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a nalezněme $\delta > 0$ tak aby platilo (15). Pak zvolme dělení tak aby

$$\nu(x_i) < \delta$$

pak je

$$\mathcal{H}^b_{a,x_n} f - \mathcal{D}^b_{a,x_n} f = \sum_i (x_{i+1} - x_i)\left(\sup_{x\in(x_i,x_{i+1})} f(x) - \inf_{x\in(x_i,x_{i+1})} f(x)\right) < \varepsilon \sum_i (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon(b-a)$$

a tedy

$$\mathcal{H}^b_a f - \mathcal{D}^b_a f = 0.$$

funkce je tedy Riemanovsky integrovatelná a protože je spojitá na uzavřeném intervalu, je omezená, proto je Riemannův integrál konečný. □

Věta 55 (Ekvivalence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Pokud* $f \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ *(tedy* f *je spojitá funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$*). Pak je funkce Riemannovsky i Newtonovsky integrovatelná a platí*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)dx = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz. Označme

$$G(x) := (\mathcal{R})\int_a^x f(x)\,d\,x$$

Ukážeme, že

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Vol $x \in (a, b)$ a $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak , že

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in U_\delta(x).$$

Pak je

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} = \frac{(\mathcal{R})\int_x^z f(x)\,d\,x}{z - x}$$

a

$$\frac{(f(x) - \varepsilon)(x - z)}{x - z} \leqslant \frac{(\mathcal{R})\int_x^z f(x)\,d\,x}{z - x} \leqslant \frac{(f(x) + \varepsilon)(x - z)}{x - z}$$

tedy

$$\lim_{z\to x} \frac{G(z) - G(x)}{z - x} = f(x)$$

pak ale dle definice Newtonova integrálu je

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,d\,x = G(b) = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,d\,x.$$

□

Důsledek 4 (Derivace integrálu s proměnnou mezí)**.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $c \in [a, b]$. Pak je

$$f(x) = \left((\mathcal{R})\int_c^x f(s)\,d\,s\right)' = -\left((\mathcal{R})\int_x^c f(s)\,d\,s\right)' (\forall x \in (a, b)).$$

15. Aplikace určitého integrálu ve fyzice a geometrii

15.1. Výpočet objemů a obsahů těles a obrazců.

Věta 56 (Cavalieriho princip). *Nechť $T \subset \mathbb{R}^n$ je těleso označme symbolem V^k k-dimenzionální objem. Dále označme řez tělesa nadrovinou ($\{x_i = t\}$) symbolem*

$$R^i_T(t) := \{(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n) : (x_1, \dots x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots x_n) \in T\}$$

Je-li pro dané i funkce $V^{n-1}(R^i_T(t))$ Riemannovski integrovatelná, pak je

$$V^n(T) = \int_{-\infty}^{\infty} V^{n-1}(R^i_T(t))\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Na přednášce si nastíníme náznak důkazu. Korektní úplný důkaz by vyžadoval přesnou definici a pochopení více rozměrné Riemannovy či Lebesgueovy míry, což přesahuje cíle tohoto kurzu, proto ponecháme tuto větu bez důkazu. □

15.1.1. *Výpočet obsahu a objemu rotačních těles.* Rotační těleso, které vzniklo rotací kolem osy z je těleso které je možné popsat nerovnicí

$$R = \{x, y, z : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant f(z), a \leqslant z \leqslant b\}$$

Jeho objem (ve skutečnosti nevíme co objem je) je dle Cavalieriho principu roven integrálu z obsahu řezů nadrovinami $\{z = t\}$. Tedy

$$V^3(T) = \int_a^b S_z(t)\mathrm{d}t = \pi \int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t$$

15.2. Výpočet obsahu trojůhelníků a objemu kuželů.

Kuželem budeme rozumět těleso, které je na řezech rovinou kolmou k ose z podobné a plocha řezů, je lineární funkcí z. Tzn.

$$T = \{(x, y, z) : a < z < b, \frac{(x, y)}{z - a} \in U\}$$

kde U je nějaký rovinný útvar. Pak

$$V^3(T) = \int_a^b (t - a)^2 S(U)\mathrm{d}t = \frac{1}{3} S(U)(b - a)^3$$

Příklad 31. V prostoru je dáno těleso

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 \wedge x^2 + 2y^2 \leqslant 2\}$$

spočtěte jeho objem.

15.3. Výpočet délky křivky.

Definice 38 (délka křivky). Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení (spojitá funkce ve všech složkách). Pak toto zobrazení nazveme *křivkou v n-dimenzionálním prostoru. Délkou křivky* φ budeme rozumět hodnotu

$$l(\varphi) := \sup_{x_i} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|,$$

kde supremum je bráno přes všechna konečná dělení $(x_i)_{i=0}^n$ intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta 57. *Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ je křivka definovaná předpisem:*

$$\varphi(t) := (t, f(t)),$$

kde f je spojitě diferencovatelná funkce na intervalu (a, b). Pak platí

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}\, t.$$

Důkaz. Vol $\varepsilon > 0$. Protože funkce f' je spojitá na $\langle a, b\rangle$ tak je i stejnoměrně spojitá. Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $t, s \in \langle a, b\rangle$ pokud $|t - s| < \delta$, pak

$$|f'(t) - f'(s)| \leqslant \eta. \tag{16}$$

Nechť $(x_i)_{i=0}^{n}$ je dělení intervalu (a, b), takové, že

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| \geqslant l(\varphi) - \varepsilon$$

a norma dělení je mnší než δ. Podle Lagrangeovy věty existuje posloupnost $(c_i)_{i=0}^{n-1}$ tak, že $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ a

$$f'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Dle Pythagorovy věty je

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f'(c_i)(x_{i+1} - x_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}\end{aligned}$$

Díky (16) dostáváme

$$(x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2} \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + (f'(x) + \eta)^2} \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f'(x)^2} + \sqrt{\eta}\sqrt{2|f'(x)| + \eta}\, \mathrm{d}x$$

Zvolme $\eta > 0$ dost malé, aby

$$\sqrt{\eta}\sqrt{2|f'(x)| + \eta} < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad (\forall x \in \langle a, b\rangle).$$

pak je

$$l(\varphi) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| + \varepsilon \leqslant \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{\varepsilon}{b - a}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x + 2\varepsilon$$

Podobně ukážeme, že

$$l(\varphi) \geqslant \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Protože ε je libovolně malé, je

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

□

Poznámka 13. V případě obecné n-dimenze

15.4. **Vybranné úlohy z teoretické mechaniky.**

Příklad 32. Spočtěte únikovou rychlost z povrchu Země. Spočtěte funkci dráhy tělesa vystřeleného z povrchu rychlostí v.

15.5. **Příklady k procvičení.**

1. Spočtěte obsah rovinného obrazce definovaného předpisem
$$U := \{(x,y) : x^4 \leqslant y \leqslant x^2 + 6\}$$
2. Udělejte náčrtek a spočtěte obsah rovinného obrazce zadaného rovností
$$O := \left\{(x,y) : \sqrt{|x|} \leqslant y \leqslant \frac{3}{\sqrt{|x|}}\right\}$$
3. Rotační těleso vzniklo rotací útvaru
$$U := \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \wedge x \leqslant 1\}$$
kolem osy y načrtněte těleso a spočítejte jeho objem.
4. Načrtněte rovinný obrazec daný předpisem
$$U := \{(x,y) : \sin(2x) \leqslant y \leqslant \cos x, x \in (0,\pi)\}$$
5. Spočtěte objem kužele, který definován jako
$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leqslant (2-z)^2 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 2\}$$
6. Načrtněte těleso a spočtěte jeho objem, je-li dáno předpisem
$$H := \left\{(x,y,z) : y^2 + z^2 \leqslant \frac{1}{(x+1)^2} \wedge x \geqslant 0\right\}$$
7. Nalezněte délku křivky, která je dána grafem funkce
$$f(x) = x^{3/2}$$
na intervalu $(0,3)$.
8. Načrtněte a určete objem tělesa vzniklého rotací útvaru
$$U = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 + 8y \leqslant 0\}$$
kolem osy y.
9. Načrtněte a spočtěte objem tělesa vzniklého rotací útvaru
$$U := \left\{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant \max\left\{\frac{1}{x}, 10\right\}, |x| \leqslant 2\right\}$$
kolem osy y.
10. Načrtněte a spočtěte objem tělesa vzniklého rotací útvaru
$$U := \{(x,y) : \max\{1, x^2\} \leqslant y \leqslant 9\}$$
kolem osy y.
11. Načrtněte a určete objem tělesa zadaného předpisem
$$T := \{(x,y,z) : x^2 + 4y^2 + z^2 \leqslant 4\}.$$
12. * Štamtgast v hospodě třímá půllitrový korbel ve kterém je částečně upité pivo. Vidí přesně polovinu dna. Kolik piva mu ještě zbývá?

16. Nekonečné řady

Připomenutí:

Definice 39. Nekonečnou sumu definujeme předpisem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} s_k,$$

kde

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$$

je posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konverguje, konverguje-li posloupnost částečných součtů s_k.

Příklad 33. Ukážeme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \tag{17}$$

Je

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Z tohoto tvaru již vidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Věta 58 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konverguje. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ pak existuje $\varepsilon > 0$ pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $k > n_0$ s $|a_k| > \varepsilon$ pak ale

$$\varepsilon < |a_k| = |s_k - s_{k-1}|.$$

A tedy posloupnost s_k nesplnuje B-C podmínku a tutíž dle věty 13 není konvergentní. □

Příklad 34. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}.$$

Máme

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n} 2n}{2.(2n)+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{4+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Tedy vybrali jsme podposloupnost, která nekonverguje k 0. Proto původní posloupnost nemůže mít limitu 0. Nesplňuje tedy nutnou podmínku konvergence a proto je divergentní.

Příklad 35. Nutná podmínka nezaručuje konvergenci. Uvažujme například řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Evidentnně je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ale

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.\end{aligned}$$

16.1. **Absolutně konvergentní řady a kritéria jejich konvergence.**

Definice 40 (absolutní konvergence řady)**.** Řekneme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je *absolutně konvergentní*, jestliže konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Příklad 36. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

je konvergentní, ale není absolutně konvergentní.

Věta 59 (O absolutní konvergenci)**.** *Pokud je řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolutně konvergentní, pak je konvergentní.

Důkaz. K důkazu konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ stačí ověřit, že posloupnost částečných součtů splňuje B-C podmínku. Zbytek plyne z věty 13. Vol $\epsilon > 0$. Z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|s_m - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{m} |a_n| = S_{n,m} \tag{18}$$

Jelikož, ale řada konverguje absolutně existuje n_0 tak že

$$S_{n,m} < \varepsilon \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

a tedy s_n splňuje B-C podmínku. □

Věta 60 (Srovnávací kritérium)**.** *Pokud*

$$0 \leqslant |a_n| \leqslant C b_n$$

pak

(i) *Pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní.*

(ii) *Pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní pak i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je divergentní.*

Důkaz. Označme s_n posloupnost částečných součtů řad $\sum_n a_n$ a t_n posloupnost častečných součtů řady b_n. Protože s_n, t_n jsou neklesající mají dle věty 11 limitu. Zřejmě pokud

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim t_n < \infty$$

pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} t_n < \infty.$$

a tedy $\sum a_n$ konverguje. Podobně pokud $\sum a_n$ diverguje pak

$$\lim_{n\to\infty} t_n \geqslant \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

také diverguje. □

Věta 61 (Limitní srovnávácí kritérium)**.** *Pokud*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \tag{19}$$

pak

(i) *Pokud* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní.*

(ii) *Pokud* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní pak i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je divergentní.*

Důkaz. (i): Protože

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$$

od určitého n_0 je

$$|a_n| \leqslant (|L|+1)|b_n|$$

Pokud tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak dle srovnávacího kritéria konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Podobně se ukáže (ii). □

Příklad 37. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, protože konverguje řada (17) a je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 < \infty$$

a konvergence tedy dostaneme použitím limitního srovnávacího kritéria.

Věta 62 (Podílové kritérium)**.** *Nechť* $a_n \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ *a* $0 < q$ *a nechť platí jedna z možností*

(i)
$$|a_{n+1}| \leqslant q|a_n| \quad (\forall n > n_0)$$

(ii)
$$|a_{n+1}| \geqslant q|a_n| \quad (\forall n > n_0)$$

(iii)
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q.$$

Pak pokud $q \in [0,1)$ *a platí (i) nebo (iii) pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pokud* $q \in (1,\infty]$ *pak pokud (i) nebo (iii) pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Nechť (i) a $q \leqslant 1$. Pro $n \geqslant n_0$ je

$$a_n \leqslant q^{n-n_0}|a_{n_0}| =: b_n$$

b_n je geometrická řada s koeficientem $|q| < 1$ je tedy konvergentní. Proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje dle srovnávacího kritéria.
Podobně nechť platí (ii) a $|q| > 1$ pak je od určitého n_0 dál splněna nerovnost

$$|a_n| \geqslant q^{n-n_0}|a_{n_0}| =: b_n.$$

b_n je geometrická řada, kde $q > 1$ tedy divergentní, proto a_n diverguje dle srovnávacího kritéria.
(iii): Pokud

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$$

Pak od určitého n_0 d □

Příklad 38. Ukážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n + 5n}{4^n}$$

konverguje. Skutečně, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^{n+1}+3^{n+1}+5(n+1)}{4^{n+1}}}{\frac{(-2)^n+3^n+5n}{4^n}} = \frac{3}{4} < 1$$

Proto, dle podílového kritéria, řada konverguje.

Věta 63 (Cauchyho odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $a_n \geqslant 0$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Pak

(i) *Pokud* $q < 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*
(ii) *Pokud* $q > 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta 64 (Kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $a_n \geqslant 0$ *a* k_n *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Označme*

$$b_n := \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} a_j$$

pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje, právě když konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Důkaz. Konverguje-li $\sum_{i=1}^{n} a_i$ pak konverguje i

$$\sum_{i=1}^{n} b_n = \sum_{j=1}^{k_{n+1}} a_i = s_{k_{n+1}} \tag{20}$$

Protože její posloupnost částečných součtů je podposloupností posloupnosti částečných součtů, což je vidět z (20). Na druhou stranu konverguje-li $\sum b_n$ označme

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

pak je pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$s_n \leqslant \sum_{j=1}^{k_{n+1}} a_n = \sum_{j=1}^{n} b_n \leqslant S$$

tedy s_n je omezená neklesající posloupnost, tedy konvergentní. □

Příklad 39. Suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

je konvergentní právě když $\alpha > 1$. Skutečně, položme $k_n := 2^n$. Pokud $\alpha > 0$, pak je

$$b_n = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{n^{\alpha}} \approx \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 2^{n(1-\alpha)}$$

a tato řada konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Věta 65 (integrální kritérium)**.** *Nechť* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je nezáporná nerostoucí funkce. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konverguje, právě když konverguje integrál

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Důkaz. Je

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Tvrzení okamžitě vyplývá z těchto dvou nerovností. □

Věta 66 (Leibnitzovo kritérium)**.** *Nechť* $a_n \downarrow 0$ *(je nerostoucí a koverguje k 0). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje.

Věta 67 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* a_n, b_n *jsou reálné posloupnosti. A platí jedna z možností*

(i) *Pokud* $\sum a_n$ *je konvergentní a* $b_n \downarrow 0$
(ii) *Pokud* $a_n \downarrow 0$ *a* $\sum_{k=1}^{n} b_k$ *je omezená.*

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konverguje.

16.3. **Příklady k procvičení.**

1. Spočtěte
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$
2. Rozhodněte, zda řada
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+5}$$
konverguje.
3. Rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}.$$
4. Rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2}{2^{2n+1}-2^n}$$
5. Pro která $x \in \mathbb{R}$ řada
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n+2^n}$$
konverguje?
6. Rozhodněte, zda řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
konverguje.
7. Rozhodněte pro která $x \in \mathbb{R}$ je řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$$
konvergentní.
8. Konverguje řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln n(n^2+1)}?$$
9. Rozhodněte o konvergenci
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n^2+3}.$$
10. Rozhodněte pro která $x \in \mathbb{R}$ je řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
konvergentní.
11. Sečtěte
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$
12. Popište obecnou metodu jak pro $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ najít součet
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k a^n.$$
13. V závislosti na hodnotě parametru $x \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci následujících řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^n$$

14. V závislosti na hodnotě parametru $x \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci následujících řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{x}{\ln(n)}\right)$$

15. V závislosti na hodnotě parametru $x \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci následujících řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{nx+1}\right)^n$$

16. ** Ukažte že platí trvzení. Reálná funkce je diferencovatelná v 0, právě když platí tvrzení
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{konverguje, pak} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) \quad \text{konverguje}$$

17. Základy lineární algerbry

17.1. Matice a operace s maticemi.

Definice 41 (Matice)**.** *Reálnou maticí typu* $n \times k$ budeme rozumět dvourozměrné pole reálných čísel obsahující n řádků a k sloupců. Množinu matic typu $n \times k$ budeme značit symbolem $\mathbb{R}^{n\times k}$. Prvek na souřadnicích i, j matice A budeme označovat jako $A_{i,j}$.

Definice 42. Buďte $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ a $C \in \mathbb{R}^{k\times m}$ pak definujeme

(i)
$$(\alpha A)_{i,j} := \alpha A_{i,j}$$

(ii)
$$(A + B)_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j}$$

(iii)
$$(AC)_{i,j} := \left(\sum_{l=1}^{k} A_{i,l} \cdot B_{l,j}\right)_{i,j} \qquad (AC \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

17.2. Vektorové prostory.

Definice 43 (Vektorový prostor)**.** Nechť V je neprázdná množina a T těleso (v našem případě obvykle $\mathbb{R}$). Nechť jsou na množině V definovány operace sčítání $+ : V \times V \to V$ a násobení skalárem $\cdot : T \times V \to V$. Pro které platí:

(V1)
$$(\forall u, v \in V) \quad u + v = v + u;$$

(V2)
$$(\forall u, v, w \in V) \quad (u + v) + w = u + (v + w);$$

(V3)
$$(\forall u, v \in V, a \in T) \quad a.(u + v) = a.u + a.v;$$

(V4)
$$(\forall a, b \in T, u \in V) \quad a.(b.u) = (a.b)u;$$

(V5)
$$(\forall a, b \in T, u \in V) \quad (a + b)u = a.u + b.u;$$

(V6)
$$(\exists o \in V)(\forall u \in V) \quad u + o = u;$$

(V7)
$$(\forall u \in V)(\exists - u \in V) \quad u + (-u) = o;$$

(V8)
$$(\forall u \in V) \quad 1.u = u.$$

Pak říkáme, že V *je vektorovým prostorem nad tělesem* T. Pokud $M \subset V$ a množina M s operacemi restringovanými na M tvoří vektorový prostor, pak říkáme, že M *je podprostorem* V, což symbolicky zapisujeme jako

$$M \subset\subset V$$

Příklad 40. (i) $\mathbb{R}^n$ se sčítáním a násobením definovaným po složkách tvoří vektorový prostor.
(ii) Prostor polynomů definovaných předpisem

$$\mathcal{P} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (\exists (a_k)_{k=0}^{n} : f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}.$$

(iii) Prostor všech posloupností konvergentních k 0.

Definice 44 (Lineární kombinace, lineární nezávislost)**.** Nechť V je vektorový prostor a $M \subset V$.

(i) *Lineární kombinací vektorů* M nazveme libovolnou sumu tvaru
$$\sum_{u \in F} a_u.u,$$
kde $F \subset M$ je konečná.
(ii) Množinu všech lineárních kombinací prvků M nazveme lineárním obalem M a budeme značit $\mathrm{Lin}(M)$
(iii) Řekneme, že množina vektorů M je *lineárně nezávislá*(dále LN), jestliže pro libovolnou lineární kombinaci vektorů $u_i \in M$ platí, že pokud
$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = o,$$
pak $c_i = 0$ pro všechna $i \in \hat{n}$.
(iv) Množina M je lineárně závislá (dále LZ), jestliže není lineárně nezávislá.

Pozorování 7. Pokud V je VP a $M \subset V$. Pak
$$\mathrm{Lin}(M) \subset\subset V$$

Tvrzení 15 (Operace (ne)měnící lineární (ne)závislost)**.** *Nechť* V *je vektorový prostor a* $M \subset V$ *a* $v \in V$. *Pak platí*
(i) M *je LN pak i* $M \setminus \{v\}$ *je LN*
(ii) *Pokud* M *je LZ, pak i* $M \cup \{v\}$ *je LZ*
(iii) *Pokud* $o \in M$ *pak* M *je LZ*
(iv) M *je LZ právě když existuje vektor* $u \in M$ *tak, že*
$$u \in \mathrm{Lin}(M \setminus \{u\}).$$
(v) *Vynásobení jednoho z vektorů* M *nenulovým číslem neovlivní lineární závislost či nezávislost skupiny.*
(vi) *Nahrazení jednoho vektoru jeho součtem s jiným vektorem skupiny neovlivní lineární (ne)závislost skupiny.*

Definice 45 (Množina generátorů, báze)**.** Nechť V je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset V$ generuje V, jestliže
$$\mathrm{Lin}(M) = V.$$
Pokud skupina vektorů M generuje V a navíc M je lineárně nezávislá pak, řekneme, že M *je báze vektorového prostoru* V

Věta 68 (Steinitzova věta)**.** *Pokud* V *je VP a* $M = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ *je lineárně nezávislá skupina vektorů a* $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *je báze prostoru* V. *Pak* $k \leqslant n$ *a při vhodném očíslování vektorů* v_i *je skupina*
$$\hat{B} = \{u_1, u_2, \dots u_k, v_{k+1}, \dots v_n\}$$
báze prostoru V. *(Jinými slovy: každou lineárně nezávislou množinu vektorů je možno doplnit na bázi)*

Důsledek 5 (Dimenze prostoru)**.** Každé dvě báze prostoru mají stejný počet prvků (resp. stejnou kardinalitu v případě nekonečné dimenze). Kardinalitu báze budeme nazívat *dimenzí prostoru.*

Definice 46 (Hodnost matice)**.** Hodností matice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ rozumíme dimenzi lineárního obalu množiny řádkových vektorů matice.

Definice 47 (Determinant matice)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak definujeme
$$\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Věta 69 (O determinantu). (i) *Nechť* $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je horní trojúhelníková matice. Pak*

$$\det(U) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

(ii) *Pokud matice* $\hat{A}$ *vznikla z* A *přičtením jednoho z řádkových vektorů k jinému, pak je*

$$\det \hat{A} \alpha \det A.$$

(iii) *Pokud matice* $\hat{A}$ *vznikla z* A *vynásobením jednoho řádkového vektoru číslem* α *pak je*

$$\det \hat{A} = \det A$$

Věta 70 (Geometrický význam determinantu). *Pokud* $u_1, u_2, \dots u_n$ *jsou řádkové vektory matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *pak n-dimenzionální objem rovnoběžníku se stranami* $u_1, u_2, \dots u_n$ *je* $|\det(A)|$.

Definice 48 (Lineární zobrazení). Buďte U, V vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť dále $L : U \to V$ je zobrazení, pro které platí

(L1)

$$(\forall u, v \in U) \quad L(u + v) = Lu + Lv$$

(L2)

$$(\forall u \in U, a \in T) \quad L(a.u) = a.Lu$$

Množinu lineárních zobrazení z U do V označíme symbolem $\mathcal{L}(U, V)$.

Věta 71 (Reprezentace lineárních zobrazení). $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *právě když existuje matice* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tak, že*

$$Lu = A.u.$$

Definice 49 (Jádro lin. zobrazení). Nechť $L \in \mathcal{L}(U, V)$ označme

$$\ker(L) := \{u \in U : Lu = o\}.$$

množinu $\ker(L)$ nazýváme *jádrem lineárního zobrazení* L

Pozorování 8. Nechť $L \in \mathcal{L}(U, V)$. Pak

$$L(U) \subset\subset V \quad \wedge \quad \ker(L) \subset\subset U$$

Věta 72 (O dimenzi jádra a obrazu). *Nechť* $L \in \mathcal{L}(U, V)$. *Pak je*

$$\dim(\ker(L)) + \dim(L(U)) = \dim(U).$$

Definice 50 (Vlastní číslo, vlastní vektor). Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matice a $u \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor a $\lambda \in \mathbb{R}$ je číslo, pro které je

$$A.u = \lambda u.$$

Pak u nazýváme *vlastním vektorem matice A* který přísluší *vlastnímu číslu* λ.

Tvrzení 16. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ *je vlastním číslem matice* $A \in \mathbb{R}^n$

(ii)

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

(iii) *Existuje nenulový vektor* $u \in \mathbb{R}^n$ *tak, že*

$$(A - \lambda I)u = o.$$

Definice 51 (Přidružené vektory). Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a u je vlastní vektor A. Řekneme, že $u_1, u_2, \dots u_k$ je *řetězec vektorů přidružených vlastnímu vektoru* u, jestliže

$$u = (A - \lambda I)^i u_i \quad (\forall i \in \hat{k}).$$

Věta 73. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Připustíme-li komplexní vlastní čísla, pak soubor*

$$\{u^1, u^1_1, \dots, u^1_{k_1}, u^2, u^2_1, \dots u^2_{k_2}, \dots u^l, u^l_1, \dots u^l_{k_l}\},$$

kde u^i *jsou vlastní vektory matice* A *a* $u^i_1, u^i_2, \dots u^i_{k_i}$ *řetězce přidružených vektorů vlastního vektoru* u^i, *tvoří bázi prostoru* $\mathbb{R}^n$

Definice 52 (Různé typy matic)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Řekneme, že A je

(i) *pozitivně semidefinitní*, jestliže
$$uAu^T \geqslant 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n)$$
(ii) *negativně semidefinitní*, jestliže
$$uAu^T \leqslant 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n)$$
(iii) *negativně definitní*, jestliže
$$uAu^T < 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n)$$
(iv) *pozitivně definitní*, jestliže
$$uAu^T > 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n)$$
(v) *indefinitní*, jestliže existuji vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že
$$uAu^T < 0 < vAv^T.$$

Věta 74 (Sylvestrovo pravidlo)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice. Definujme posloupnost*
$$a_n := \prod_{i=1}^{n} D_i,$$
kde
$$D_i := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i} \end{pmatrix}$$
Pak

(i) *Pokud*
$$\operatorname{sgn}(a_i) = 1 \quad (\forall i \in \hat{n}),$$
pak je matice A pozitivně definitní.

(ii) *Pokud*
$$\operatorname{sgn}(a_i) = -1 \quad (\forall i \in \hat{n})$$
pak je matice A negativně definitní.

(iii) *Pokud existují $i, j \in \hat{n}$ tak, že*
$$\operatorname{sgn}(a_i) = 1 \wedge \operatorname{sgn}(a_j) = -1$$
pak je matice A indefinitní.

17.3. **Prostory se skalárním součinem a normované prostory.**

Definice 53 (Normovaný lineární prostor)**.** Pokud V je vektorový prostor a funkce $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(N1) $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$
(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$
(N3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Pak funkci říkáme *norma na prostoru* V a dvojici $(V, \|\cdot\|)$ *normovaný lineární prostor.*

Definice 54 (Prostor se skalárním součinem)**.** Nechť V je vektorový prostor a $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ je funkce pro kterou platí

(U1) Pro všechny $u \in V$ je $u.u \geqslant 0$, rovnost nastává, právě když $u = 0$.

(U2)
$$u.(v + w) = u.v + u.w \quad (\forall u, v, w \in V)$$
(U3)
$$u.v = v.u \quad (\forall u, v \in V)$$
(U4)
$$au.v = u.av = a(u.v) \quad (\forall u, v \in V, a \in \mathbb{R})$$

Pak dvojici $(\mathsf{V}, \cdot)$ nazveme *unitárním prostorem.*

Věta 75 (Cauchy-Schwarz)**.** *Nechť* $(\mathsf{V}, \cdot)$ *je unitární prostor. Pak je*

$$(u.v)^2 \leqslant (u.u)(v.v).$$

Věta 76 (Norma indukovaná skalárním součinem)**.** *Nechť* $(\mathsf{V}, \cdot)$ *je unitární protor. Pak zobrazení* $\mathsf{N} : \mathsf{V} \times \mathsf{V} \to \mathbb{R}$ *definované předpisem*

$$\|u\| := \sqrt{u.u}$$

je norma na prostoru V*.*

Věta 77 (Pythagorova věta)**.** *Nechť* X *je unitární prostor,* $x, y \in \mathsf{X}$ *jsou k sobě kolmé vektory. Pak je*

$$\|x + y\|_{\mathsf{X}}^2 = \|x\|_{\mathsf{X}}^2 + \|y\|_{\mathsf{X}}^2.$$

18. Metrické prostory

Definice 55 (Metrika a norma)**.** Nechť M je naprázdná množina a $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(M1)
$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (\forall x, y \in M)$$

(M2)
$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad (\forall x, y, z \in M)$$

(M3)
$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Pak funkci ρ nazýváme *metrikou na množině* M a dvojici (M, ρ) *metrickým prostorem.*

Poznámka 14. Je-li $(M, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, pak definujeme normou indukovanou metriku předpisem

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Lze snadno ověřit, že takto definovaná funkce je metrikou.

Tvrzení 17. *Nechť* $M = \mathbb{R}^n$ *definujme*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p \geqslant 1$ *je* $\|\cdot\|_p$ *je norma.*

Pozorování 9. Pokud $p = 2$ dostáváme standardní Euklidovskou normu. Budeme-li v dalším textu uvažovat normu a nebude-li řečeno o jakou normu se jedná budeme předpokládat, že se jedná o Euklidovskou normu.

Tvrzení 18 (Youngova nerovnost)**.** *Nechť* $p, q \in (1, \infty)$ *jsou čísla, pro která je*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a nechť $a, b \in (0, \infty)$ *pak je*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Víme, že funkce $\ln(x)$ je konkávní na celém svém definičním oboru. Tedy, protože

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

máme

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln a + \ln b$$

Protože e^x je rostoucí funkce můžeme obě strany do této funkce dosadit a nerovnost zůstane zachována, proto

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$$

□

Věta 78 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť* $p, q \in (1, \infty)$ *jsou čísla, pro která je*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

pak

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Důkaz. Použijeme-li právě dokázanou Youngovu nerovnost dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i b_i &= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q} \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{1/q}} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q} \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)} + \frac{|b_i|^q}{q\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

□

Důkaz tvrzení 17. Použijeme Hölderovu nerovnost a dostáváme

$$\begin{aligned}
\|a+b\|_p^p &\leqslant \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p \\
&= \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)(|a_i| + |b_i|)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n |a_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |b_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|a\|_p + \|b\|_p)\|a+b\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Vydělením nerovnosti výrazem $\|a+b\|_p^{p-1}$ dostaneme požadovanou nerovnost. □

Příklad 41. Nechť

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

Pak $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ je normovaný lineární prostor.

Příklad 42. (i) Na prostoru spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ (budeme dále značit $\mathcal{C}([0, 1])$) definujeme

$$\|f\|_{\max} := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Pak $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\max})$ je NLP nekonečné dimenze.

(ii) Na prostoru

$$l^1 := \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^\infty |a_i| < \infty \right\}$$

definujeme

$$\|a\|_{l^1} := \sum_{i=1}^\infty |a_i|.$$

(iii) Na prostoru Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $(0, 1)$ definujme

$$\|f\|_{L^1(0,1)} := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Pak $(L^1, \|\cdot\|_{L^1(0,1)})$ tvoří NLP nekonečné dimenze.

(iv) Množina omezených posloupností (značíme l^∞) spolu s

$$\|a\|_{l^\infty} := \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$$

tvoří NLP, nekonečné dimenze.

(v) Pokud

$$c_0 := \{a : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\} \quad c_{00} := \{a : \lim_{n\to\infty} : \#\{n : a_n \neq 0\} < \infty\}$$

pak $(c_0, \|\cdot\|_{l^\infty})$ a $(c_{00}, \|\cdot\|_{l^\infty})$ tvoří NLP nekonečné dimenze a

$$c_{00} \subset c_0 \subset l^\infty.$$

Definice 56 (Ekvivalence norem a metrik)**.** Řekneme, že metriky ρ, σ resp. normy $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ jsou ekvivalentní na množině M, jestliže existuje konstanta $C \in (0,\infty)$ tak, že

$$\frac{1}{C}\sigma(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant C\rho(x,y) \quad (\forall x, y \in M)$$

resp.

$$\frac{1}{C}\|u\|_X \leqslant \|u\|_Y \leqslant C\|u\|_X \quad (\forall u \in M).$$

Poznámka 15. Jestliže X je vektorový prostor konečné dimenze jsou na něm libovolné dvě normy ekvivalentní. Toto tvrzení není jednoduché dokázat a k jeho důkazu bychom potřebovali další poznatky, uvedeme jej tedy bez důkazu.

Definice 57 (Konvergence v metrickém prostoru)**.** Buď (M,ρ) metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $x_n \in M$ konverguje k x což symbolicky zapisujeme, jako

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{nebo} \quad x_n \to x$$

jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) \quad \rho(x_n, x) < \varepsilon$$

Koulí o středu $s \in M$ a poloměru $r > 0$ budeme rozumět množinu

$$B(x,r) := \{y \in M : \rho(x,y) < r\}$$

Definice 58 (Otevřené a uzavřené množiny)**.** Nechť (M,ρ) je metrický prostor. Nechť $A \subset M$ je množina. Řekneme, že

(i) Pro každé $x \in A$ existuje $r > 0$ tak, že

$$B(x,r) \subset A.$$

(ii) A je uzavřená, jestliže $M \setminus A$ je otevřená.

Příklad 43. Ukažte, že každý otevřený interval je otevřená množina a každý uzavřený interval je uzavřená množina v metrickém prostoru $(\mathbb{R},\rho)$, kde

$$\rho(x,y) = |x-y|.$$

Příklad 44. V libovolném metrickém prostoru (M,ρ) je koule $B(x,r)$ otevřená množina.

Pozorování 10. Nechť $A_1, A_2, \dots A_n \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny v $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_{eukl})$ pak

$$M = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

je otevřená množina v $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eukl})$.

Věta 79. *Nechť* (M,ρ) *je metrický prostor. Nechť* $A \subset M$*. Pak je ekvivalentní*

(i) A *je uzavřená*

(ii) *Pokud* $x_n \to x$ *a pro všechna* n *přirozená je* $x_n \in A$*, pak je* $x \in A$*.*

Důkaz. (i)⇒(ii): Sporem: nechť $x_n \in A$ a $x_n \to x \notin A$. Protože $M \setminus A$ je otevřená pak existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset M \setminus A$ pak ale od určitého n_0 dál je $x_n \in B(x, r)$ a tedy $x_n \notin A$, což je spor.

(ii)⇒(i): Ukážeme nepřímo. Nechť A není uzavřená. Tedy existuje $x \in M \setminus A$ tak, že
$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset.$$
Nechť
$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$$
pak je $x_n \in A$ a $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$, tedy $x_n \to x \notin A$. □

Věta 80. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A_\alpha \subset M$ pro všechna $\alpha \in I$.*

(i) *Jsou-li A_α otevřené pak*
$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
je otevřená.

(ii) *Jsou-li A_α uzavřené, je i*
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$
uzařená.

(iii) *Je-li I konečná a A_α jsou otevřené pak je i*
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$
otevřená množina.

(iv) *Je-li I konečná a A_α jsou uzavřené pak je i*
$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
uzavřená množina.

Důkaz. (i): Pokud
$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
Pak existuje $\alpha \in I$ tak, že $x \in A_\alpha$ tedy existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A_\alpha$ a tedy
$$B(x, r) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$
(ii): Z de Morganových vzorců, je
$$M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha)$$
Tedy dle (i) je doplněk průniku uz. množin otevřená množina a tedy průnik uzavřených množin je uzavřená množina.

(iii): Nechť
$$(A_\alpha)_{\alpha \in I} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$
Pak protože $x \in A_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existují $r_1, r_2, \ldots, r_n$ kladné tak, že
$$B(x, r_i) \subset A_i \quad (\forall i \in \hat{n}).$$
Položme
$$r := \min_{i \in \hat{n}} r_i$$
pak
$$B(x, r) \subset A_i \quad (\forall i \in \hat{n})$$

Tedy

$$B(x,r) \subset \bigcap_{i\in\hat{n}} A_i$$

Proto je průnik konečně mnoha otevřených množin otevřená množina.
(iv) Dostaneme použitím de Morganových vzorců a (iii). □

Definice 59. Nechť (M,ρ) je metrický prostor.

(i) Uzávěrem množiny A rozumíme množinu

$$\overline{A} := \{x \in M | \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$$

(ii) *Vnitřkem množiny* A rozumíme množinu

$$A^0 := \{x \in A | (\exists r > 0) B(x,r) \subset A\}$$

(iii) *Hranicí množiny* A rozumíme množinu

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^0$$

(iv) *Derivací množiny* A rozumíme množinu hromadných bodů, tedy

$$A' = \{x \in M | (\forall r > 0)\,(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset\}$$

(v) Pokud $x \in A \setminus A'$ pak x nazveme *izolovaným bodem množiny* A.

(vi) *Vzdáleností bodu* $x \in M$ *od neprázdné množiny* A budeme rozumět

$$\operatorname{dist}(A,x) := \inf_{y\in A} \rho(x,y).$$

Příklad 45. (i) V euklidovské metrice na $\mathbb{R}$ uvažujme otevřený interval $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak $A^0 = A$, $\overline{A} = \langle a,b\rangle$ a $\partial A = \{a,b\}$ a $A' = \langle a,b\rangle$.

(ii) V prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eukl})$ uvažujme množinu

$$A = B(0,1).$$

Pak je $A^0 = A$,

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{eukl} \leqslant 1\},\\ \partial A &= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{eukl} = 1\}\\ A' &= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{eukl} \leqslant 1\}\end{aligned}$$

(iii) V $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eukl})$ je

$$\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n \quad \text{a} \quad (\mathbb{Q}^n)' = \mathbb{R}^n$$

Věta 81 (Charakterizace uzávěru množiny)**.** *Nechť* (M,ρ) *je metrický prostor a* $A \subset M$*. Následující podmínky jsou ekvivalentní*

(i) $x \in \overline{A}$

(ii) *Existuje posloupnost prvků* A *tak, že* $x_n \to x$

(iii) *Pro libovolnou* $F \supset A$ *uzavřenou je* $x \in F$.

(iv) $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.

Důkaz. (i)⇒(ii):$x \in \overline{A}$ pak označíme-li

$$B_n := B\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

pak je $B_n \cap A$ neprázdná. Vyberme $x_n \in B_n \cap A$. Pak zřejmě $x_n \to x$ a $x_n \in A$. Proto platí (ii).

(ii)⇒(iii) Je-li F uzavřená pak pokud $x \in M \setminus F$ potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\rho(x,x_n) > \varepsilon \quad (\forall x_n \in F)$$

tedy neexistuje posloupnost x_n prvků A konvergující k x.

(iii)⇒(iv) Pokud $\operatorname{dist}(x,A) > 0$ pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x,2\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Pak označíme-li $F := M \setminus B(x,\varepsilon)$, je $F \supset A$ uzavřená nadmnožina A neobsahující x.

(iv)⇒(i) Pokud $x \notin \overline{A}$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset.$$

Pak ale $\operatorname{dist}(x, A) \geqslant \varepsilon > 0$. □

Věta 82 (Charakterizace vnitřku množiny)**.** *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor a* $A \subset M$*. Pak je ekvivalentní*

(i) $x \in A^0$
(ii) *Pokud* $x_n \in M \setminus A$ *pak* x_n *nekonverguje k* x.
(iii) *Existuje* $G \subset A$ *otevřená tak, že* $x \in G$.
(iv) $\operatorname{dist}(x, M \setminus A) > 0$

Důkaz. Dokazuje se podobně jako předchozí tvrzení o uzávěru, proto jej necháváme jako cvičení. □

Důsledek 6. (i)
$$\overline{A} = \bigcap \mathcal{F}$$
kde $\mathcal{F}$ je systém všech uzavřených nadmnožin A

(ii)
$$A^0 = \bigcup \mathcal{G}$$
kde $\mathcal{G}$ je systém všech otevřených podmnožin A.

(iii) A je otevřená, právě když $A^0 = A$.
(iv) A je uzavřená, právě když $\overline{A} = A$.

Definice 60. (i) *Diametrem (průměrem)* neprázdné množiny $A \subset M$ budeme rozumět hodnotu
$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\rho(x, y) | x, y \in A\}$$

(ii) Řekneme, že množina $A \subset M$ je *omezená*, jestliže existuje $r > 0$ a $x \in M$ tak, že
$$A \subset B(x, r).$$

Tvrzení 19. *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor a* $A \subset M$*. Pak* A *je omezená, právě když*
$$\operatorname{diam}(A) < \infty.$$

Důkaz. Pokud je omezená pak $A \subset B(x, r)$ pak pro $x, y \in A$ je
$$\rho(y, z) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z) \leqslant 2r$$
tedy, přechodem k supremu přes všechna y, z dostaneme $\operatorname{diam}(A) \leqslant 2r$.

Nadruhou stranu, pokud $x \in A$ pak je
$$A \subset B(x, \operatorname{diam}(A)).$$
A tedy A je omezená. □

Definice 61. (i) Řekneme, že množina $A \subset M$ je *totálně omezená* nebo též *prekompaktní*, jestliže
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists (x_i)_{i=1}^n \subset A) A \subset \bigcup_i B(x_i, \varepsilon).$$

(ii) Řekneme, že posloupnost $x_n \in M$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, jestliže
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geqslant n_0) \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(iii) Řekneme, že metrický prostor (M, ρ) je úplný, jestliže každá posloupnost splňující B-C podmínku je konvergentní.

Cvičení 15. Ukažte, že

(i) Prostor $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|_{eukl})$ není úplný.
(ii) Prostor $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_{eukl})$ je úplný.
(iii) Prostor $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ je úplný.
(iv) Prostor $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ není úplný.

Tvrzení 20. *Nechť n je přirozené a $p \geqslant 1$ pak je $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ úplný metrický prostor.*

Věta 83 (Cantorova věta o úplných prostorech)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor pak je ekvivalentní*

(i) *(M, ρ) je úplný.*
(ii) *Pokud F_n je posloupnost neprázdných uzavřených množin splňující*

$$F_{n+1} \subset F_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{a} \quad \operatorname{diam}(F_n) \to 0. \tag{21}$$

Pak je existuje $x \in M$ tak, že

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}.$$

Důkaz. Nechť (M, ρ) je úplný. Necht dále F_n jsou neprazdné splňující (21). Vol $\varepsilon > 0$. Vyberme $x_n \in F_n$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$. Zřejmě

$$(j < k) \Rightarrow \operatorname{diam}(F_j) \geqslant \operatorname{diam}(F_k),$$

proto

$$\rho(x_l, x_m) \leqslant \varepsilon \quad (\forall l, m \geqslant n_0).$$

Tedy x_n je Cauchyovská a proto i konvergentní. Označme

$$x := \lim x_n$$

pak je $x \in F_n$ pro libovolné n přirozené a tedy

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Nadruhou stranu nechť (M, ρ) není úplný MP. A buď x_n posloupnost, která je Cauchyovská, ale nikoliv konvergentní. Položme

$$F_n := \overline{\{x_k\}_{k=n}^{\infty}}$$

pak zjevně F_n splňuje (21) ale

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset.$$

□

V následujícím oddíle budeme používat pojem ε-síť. Pro $\varepsilon > 0$ je množina $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *ε-síť*, jestliže

$$\bigcup_{\alpha \in I} B(x_\alpha, \varepsilon) \supset A$$

Věta 84 (Charakterizace prekompaktnosti)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Pak je ekvivalentní*

(i) *A je prekompaktní*
(ii) *Pokud $x_n \in A$, pak lze z x_n vybrat posloupnost, která je Cauchyovská.*

Důkaz. (i)⇒(ii): Nechť $x_n \in A$ je posloupnost. Položme $x_n^0 = x_n$. Máme-li zvolenou posloupnost x_n^k. Vol konečnou 2^{-k-1}-síť $(s_j^{k+1})_{j=1}^{l_j}$. Existuje $i \in \hat{l}_j$ tak, že $B(s_j^{k+1}, 2^{-k-1})$ obsahuje nekonečně mnoho členů x_n^k ty vybereme do posloupnosti x_n^{k+1}. Položme

$$z_n := x_n^n$$

Pak

$$\rho(z_i, z_j) \leqslant \max\{2^{-i}, 2^{-j}\}$$

a je to tedy Cauchyovská posloupnost vybraná z x_n

(ii)⇒(i): Důkaz provedeme obměnou. Pokud není A prekompaktní pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že, neexistuje konečná ε-síť. Vyberme $x_1 \in A$. Protože $A \setminus B(x_1, \varepsilon)$ je neprázdná vybereme $x_2 \in A \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Podobně máme-li zvoleny $x_1, x_2, \dots x_k$ vybereme

$$x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$$

Pak je

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon \quad \text{pro } m \neq n$$

a tedy z x_n nelze vybrat Cauchyovskou posloupnost. □

Definice 62. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$.

(i) Řekneme, že množina $A \subset M$ je *kompaktní*, jestliže platí. Pokud I_α jsou otevřené množiny a

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha$$

pak existuje $F \subset I$ konečná tak, že

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in F} I_\alpha.$$

Jinými slovy: z každého otevřeného pokrytí množiny A lze vybrat konečné pokrytí.

(ii) A je *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti můžeme vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v A.

Tvrzení 21. *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor a* $A \subset M$. *Pokud* A *je sekvenciálně kompaktní, pak*

(i) A *je uzavřená;*
(ii) *Prostor* (A, σ), *kde* $\sigma = \rho|_{A \times A}$, *je úplný.*
(iii) $F \subset A$ *je sekvenciálně kompaktní, právě když je uzavřená.*

Důkaz. Důkaz ponecháváme jako cvičení čtenáři. □

Definice 63 (Spojité funkce na metrických prostorech)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že funkce $f : P \subset M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x, jestliže $x \in P'$ a pro každou posloupnost $x_n \in P$ platí

$$x_n \to x \quad \text{pak} \quad f(x_n) \to f(x).$$

Řekneme, že funkce $f : P \subset M \to \mathbb{R}$ je spojitá, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in P$

Definice 64 ((bi)lipchitzovská funkce)**.** Nechť (M, ρ) a (S, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že funkce $f : M \to S$ je *lipchitzovská*, jestliže existuje $C \in (0, \infty)$

$$\sigma(f(x), g(x)) \leqslant C\rho(x, y)$$

Řekneme, že je *bi-lipchitzovská*, pokud je lipchitzovská a navíc existuje B tak, že

$$\rho(x, y) \leqslant B\sigma(f(x), g(x)).$$

Poznámka 16. Ekvivalentně můžeme definovat spojitost v bodě $x \in P$ následovně. Funkce je spojitá v bodě $x \in P$ jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) y \in B(x, \delta) \cap P \Rightarrow f(x) \in B(x, \varepsilon).$$

Důkaz. □

Věta 85 (Charakterizace spojitosti)**.** *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor.* $f : M \to \mathbb{R}$ *je spojitá, právě když pro každou* $G \subset \mathbb{R}$ *otevřenou je* $f^{-1}(G)$ *otevřená v* (P, ρ).

Důkaz. Nechť f je spojitá. Pokud by $M := f^{-1}(G)$ nebyla otevřená, pak existují $x_n \in M^c$ tak, že

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \in M.$$

Pak ale ze spojitosti f je

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) \in G,$$

což je spor s otevřeností G.

Nadruhou stranu, není-li f spojitá, pak existuje $x_n \to a$ tak, že $f(x_n)$ nekonverguje k $f(a)$. Existuje tedy $G \ni f(a)$ otevřená a vybraná posloupnost y_n z x_n tak, že

$$f(y_n) \notin G.$$

Pak ale $f^{-1}(G) \ni a$ není otevřená protože $y_n \to a$ ale $y_n \notin f^{-1}(G)$. □

Poznámka 17. Definici spojitosti lze rozšířit na funkce mezi dvěma metrickými prostory. Řekneme, že funkce $f : M \to S$ je spojitá pokud vzor libovolné otevřené množiny v S je otevřená množina v M. Píšeme $f \in \mathcal{C}(M, S)$

Věta 86. *Nechť* (M, ρ) *jsou metrické prostory a* $f, g : M \to \mathbb{R}$ *jsou funkce. Pak platí*

(i)
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$
(ii)
$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x)$$
(iii)
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Mají-li pravé strany smysl.

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu u reálných funkcí. □

Věta 87 (O limitě složené funkce)**.** *Nechť* $(M, \rho), (S, \sigma)$ *jsou metrické prostory a nechť*

$$f : M \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g : S \to M$$

nechť dále

$$\lim_{x\to b} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a} g(x) = b$$

a navíc $(B(b, \delta) \setminus \{b\}) \cap g(B(a, r) \cap D_g)$ *je neprázdná pro všechna* $\delta, r > 0$ *a platí jedna z podmínek*

(P1) f *je spojitá v bodě* b

(P2)
$$b \notin g(\mathcal{P}_\delta(a))$$
pro nějaké $\delta > 0$.

Pak

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L.$$

Důkaz. Vol $\varepsilon > 0$. Nechť nejprve platí (P1). Existuje $\eta > 0$ tak, že

$$f(B(b, \eta) \cap D_f) \subset U_\varepsilon(L).$$

a existuje $\delta > 0$ tak, že

$$g(\mathcal{P}_\delta(a) \cap D_g) \subset B(b, \eta).$$

Pak ale pro všechna $x \in \mathcal{P}_\delta(a) \cap D_g$ je $f(g(x)) \in U_\varepsilon(L)$. Podobně pokud platí (P2) pak pro $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ tak, že

$$f(\mathcal{P}_\eta(b)) \subset U_\varepsilon(L).$$

Dále existuje $\delta > 0$, že

$$g(\mathcal{P}_\delta(a)) \subset \mathcal{P}_\eta(b).$$

Pak ale pro $x \in D_g \cap \mathcal{P}_\delta(a)$ je

$$f(g(x)) \in U_\varepsilon(L).$$

□

Věta 88 (O existenci extrémů)**.** *Nechť* (P, ρ) *je úplný metrický prostor a* $A \subset P$ *je sekvenciálně kompaktní množina a* $f : A \to \mathbb{R}$ *spojitá funkce. Pak existují* $m, M \in A$ *tak, že*

$$f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M) \quad (\forall x \in A).$$

Jinými slovy: spojitá funkce f *na kompaktní množině* A *nabývá minima a maxima.*

Důkaz. Označme
$$S := \sup\{f(x) : x \in A\}$$
pak existuje posloupnost $x_n \in A$ tak, že
$$f(x_n) \to S$$
Pak ale můžeme vybrat konvergentní podposloupnost $y_n \to M$. Pak ale ze spojitosti f dostáváme
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(M).$$
a tedy
$$f(M) \geqslant f(x) \quad (\forall x \in A)$$
Podobně bychom ukázali i existenci minima. □

Definice 65 (Kontrakce)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení
$$\varphi : M \to M$$
je *kontrakce na* M, jestliže existuje $C < 1$ tak,
$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant C\rho(x, y) \quad (\forall x, y \in M).$$

Lemma 5. Nechť A je sekvenciálně kompaktní, $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí a $r : A \to (0, \infty)$ funkce definovaná předpisem

$$r(x) := \sup\{r : \exists\alpha \in I : B(x, r) \subset G_\alpha\}. \tag{22}$$

Pak $r \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

Důkaz. Důkaz ponecháváme jako cvičení. □

Věta 89 (Charakterizace kompaktnosti)**.** *Nechť* (M, ρ) *je úplný metrický prostor a* $A \subset M$. *Pak je ekvivalentní.*

(i) A *je kompaktní.*
(ii) *Z každé posloupnosti* $x_n \in A$ *lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v* A.
(iii) A *je uzavřená a prekompaktní.*
(iv) *Každá spojitá reálná funkce na* A *nabývá extrémů.*

Důkaz. (i)⇒(iii). Nechť A není uzvřená. Pak existují $x_n \in A$, že $x_n \to x \notin A$. Rozmyslete si, že pro
$$G_n := \left\{y \in X : \operatorname{dist}(x, y) > \tfrac{1}{n}\right\}$$
je $\{G_n : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ otevřené pokrytí A, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí. Tedy A není kompaktní.

Dále, pokud by neexistovala konečná ε-síť pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak by systém $(B(x, \varepsilon))_{x\in A}$ tvořil otevřené pokrytí, ze kterého nelze vybrat konečné podpokrytí, což je ve sporu s kompaktností A.

(iii)⇒(ii): Nechť x_n je posloupnost. Dle věty 84 z ní lze vybrat Cauchyovskou podposloupnost y_n Protože X je úplný, je y_n konvergentní. Označme limitu jako $a \in X$. Protože $y_n \in A$ a A je uzavřená, je $a \in A$.

(ii)⇒(i): Dle věty 88 a lemma 5 má funkce definovaná předpisem (22) minimum na A. Označme
$$m := \min_{x\in A} r(x)$$
pak zjevně $m > 0$. Vol $x_0 \in A$ libovolně a nalezneme množinu $G_0 \in (G_\alpha)_{\alpha\in I}$ tak, že
$$B\left(x, \frac{m}{2}\right) \subset G_0$$
Následně, je-li vybráno $x_1, \dots x_k$ a $G_1, \dots G_k$ a pokud A není pokryta množinami $\{G_0, G_1, \dots, G_{k-1}\}$, nalezneme $G_k \in (G_\alpha)_{\alpha\in I}$ tak, že
$$x_k \in B\left(x_k, \frac{m}{2}\right) \subset G_k$$

Jsou dvě možnosti buď v nějakém kroku pokryjeme celou množinu A a proces skončí. V takovém případě jsme ukázali, že lze vybrat konečné pokrytí a tedy A je kompatkní. Pokud se tak nestane dostaneme posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů, pro kterou je

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \frac{m}{2} \quad \text{pro} \quad m \neq n$$

Pak ale z $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost, což je ve sporu se sekvenciální kompaktností A.

(ii)⇒ (iv): Viz. věta88.

(iv)⇒(iii): Pokud není uzavřená pak existuje bod $x \in \overline{A} \setminus A$. Definujme funkci $f : A \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(y) := \rho(x, y).$$

Pak zřejmě $f(y) > 0$ pro všechny $y \in A$ ale

$$\inf_{y \in A} f(y) = 0$$

protože $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ a tedy f nenabývá minima.

Pokud na druhou stranu není A prekompaktní pak existuje $r > 0$ a posloupnost $x_n \in A$ tak, že

$$\mathcal{B} = \{B_n = B(x_n, r) : n \in \mathbb{N}\}$$

je nekonečný systém disjunktních koulí a $B_n \subset A$. Definujme

$$f(y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{r} \operatorname{dist}(y, B_n^c).$$

Pak zřejmě f je spojitá a $f(x_n) = n$ a tedy f nenabývá na A maxima. □

Věta 90 (Banachova věta o pevném bodě)**.** *Nechť* (M, ρ) *je úplný metrický prostor. A nechť* φ *je kontrakce na* M. *Pak existuje jediný* $x \in M$ *tak, že*

$$\varphi(x) = x.$$

Důkaz. Jednoznačnost:
Nechť $x, y \in M$ jsou pevné body. Pak je

$$\rho(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant C\rho(x, y)$$

pro nějakou $C < 1$. Proto

$$(1 - C)\rho(x, y) \leqslant 0,$$

a tedy $\rho(x, y) = 0$, proto $x = y$.

Existence:
Vol $x_0 \in M$ libovolné. Definujme posloupnost x_n induktivně

$$x_{n+1} := \varphi(x_n).$$

Indukcí snadno dokážeme, že

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant C^n \rho(x_1, x_0)$$

proto pro $l < n$ přirozená je

$$\begin{aligned}\rho(x_l, x_n) &\leqslant \sum_{j=l}^{n-1} \rho(x_j, x_j + 1) \\ &\leqslant \rho(x_0, x_1) \sum_{j=l}^{n-1} C^j \\ &= \rho(x_0, x_1) \frac{C^l}{1 - C}.\end{aligned}$$

Tedy posloupnost je Cauchyovská a proto konvergentní. Označme její limitu jako x. Ze spojitosti φ platí

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

a tedy x je pevný bod. □

Definice 66. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že množina A je

(i) *hustá*, pokud
$$\overline{A} = M;$$
(ii) *řídká*, jestliže
$$\left(\overline{A}\right)^0 = \emptyset;$$
(iii) *první kategorie*, jestliže
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
kde A_n jsou řídké množiny.

(iv) *druhé kategorie*, není-li první kategorie.

(v) *residuální*, jestliže $M \setminus A$ je první kategorie.

Věta 91 (Bairova věta o kategoriích)**.** *Nechť* (M, ρ) *je úplný metrický prostor a* $G \subset M$ *neprázdná otevřená množina. Pak* G *je druhé kategorie.*

Důkaz. Protože každá otevřená množina obsahuje nějakou kouli, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $G = B(x, r)$. Nechť $A_n \subset M$ jsou řídké množiny. Pak i
$$E_n := \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$
jsou řídké. Vol posloupnosti $x_n \in M$ a r_n následovně $x_0 := x, \quad r_0 := r$. Máme-li zvoleno x_n, r_n pak protože E_n je řídká nalezneme r_{n+1}, x_{n+1} tak, aby
$$B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \setminus E_n.$$
Pro takto zkonstruovanou posloupnost položme
$$F_n := \overline{B(x_n, r_n)}.$$
Pak F_n jsou uzavřené množiny $F_{n+1} \subset F_n$ a $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Dle Cantorovy věty je
$$\bigcap F_n = \{x\}$$
Pak ale
$$x \notin \bigcup E_n.$$
To ale znamená, že $B(x, r)$ není první kategorie. □

Definice 67 (Separabilní prostor)**.** Řekneme, že metrický prostor (M, ρ) je *separabilní*, jestliže existuje spočetná množina $A \subset M$ tak, že
$$\overline{A} = M.$$

Příklad 46. (i) Příkladem separabilních prostorů jsou $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou. Skutečně $\mathbb{Q}^n$ tvoří spočetnou hustou podmnožinu.

(ii) Příkladem neseparabilního prostoru je např. $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou. Skutečně, jedinou hustou podmnožinou je množina všech reálných čísel.

Věta 92 (Charakterizace separability)**.** *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) M *je separabilní.*

(ii) *Pro každou nespočetnou množinu* A *je* $A' \neq \emptyset$*.*

(iii) *Z každého otevřeného pokrytí* M *lze vybrat spočetné podpokrytí.*

Důkaz. (i)⇒(ii): Dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že (ii) neplatí. Nechť $A \subset M$ je nespočetná množina s $A' = \emptyset$. Pak pro každé $x \in A$ existuje $r_x > 0$ tak, že

$$B(x, 2r_x) \cap A = x.$$

Zřejmě

$$\mathcal{B} := \{B(x, r_x) : x \in A\}$$

je nespočetný systém disjunktních koulí. Označme

$$\mathcal{B}_n := \left\{B(x, r_x) : r_x \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Pak je

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Protože $\mathcal{S}$ je nespočetná, existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathcal{S}_n$ je nespočetná. Pokud $H \subset M$ je spočetná, pak existuje $B \in \mathcal{S}_n$ tak, že B neobsahuje žádný bod H. Tedy H nemůže být hustá v M.

(ii)⇒(iii): Nechť $\mathcal{G} = (G_\alpha)_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M. Je-li $r : M \to \mathbb{R}$ definována předpisem (22). Pro každý bod $x \in M$ existuje $G_x \in \mathcal{G}$ tak, že

$$B\left(x, \frac{r_x}{2}\right) \subset G_x$$

Pak systém

$$\mathcal{G}_x := \{G_x : x \in M\}$$

tvoří otevřené podpokrytí $\mathcal{G}$. Položme

$$\tilde{\mathcal{G}}_x^n := \left\{G_x : \frac{r_x}{2} \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

Následně definujme (v uspořádání dle inkluze)

$$\mathcal{G}_x^n := \max\left\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{G}}_x^n : [(G_x, G_y \in \mathcal{S}) \wedge \rho(x,y) < \frac{1}{n}] \Rightarrow x = y\right\}$$

(iii)⇒(i): Vol n přirozené. Označme

$$B_n := \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in M\right\}.$$

Pak B_n je otevřené pokrytí, proto z něj vybereme spočetné podpokrytí

$$\mathcal{B}_n := \left\{B\left(x_k^n, \frac{1}{n}\right)_{k,n\in\mathbb{N}}\right\}$$

Pak $\{x_k^n\}$ tvoří spočetnou hustou podmnožinu M a tedy M je separabilní.

□

Definice 68 (Projekce na množinu)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Nechť $A \subset M$ a $x \in M$. Definujme

$$P_A(x) := \{a \in A : \rho(x, A) = \operatorname{dist}(x, A)\}.$$

Pokud je tato množina jednobodová označíme její prvek symbolem $p_A(x)$ a nazveme *projekcí prvku* x *na množinu* A.

Definice 69 (Součinové prostory)**.** Nechť $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2), \dots (M_n, \rho_n)$ jsou metrické prostory. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujme součinovou metriku na $\times_{k=1}^n M_i$ předpisem

$$\sigma_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^n \rho_k(x_k, y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definujme dále

$$\sigma_\infty(x, y) := \max\{\rho_i(x_i, y_i) : i \in \hat{n}\}.$$

Lemma 6. Pokud $1 \leqslant p \leqslant \infty$ pak pro všechna $x, y \in S$ je

$$\sigma_\infty(x,y) \leqslant \sigma_p(x,y) \leqslant n^{1/p}\sigma_\infty(x,y)$$

Důkaz. Ponecháme jako cvičení čtenáři. □

Věta 93 (O součinu metrických prostorů)**.** *Nechť* $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2), \dots (M_n, \rho_n)$ *jsou metrické prostory a* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Označme*

$$S := \times_{i=1}^m M_i$$

Platí

(i) *Pokud* M_i *jsou kompaktní, pak* (S, σ_p) *je kompaktní.*
(ii) *Pokud* M_i *jsou separabilní pak* (S, σ_p) *je separabilní.*
(iii) *Pokud* M_i *jsou úplné, pak* (S, σ_p) *úplný.*

Důkaz. (ii): Nechť H_i jsou spočetné husté množiny v M_i. Pak

$$H := \times_{i=1}^n H_i$$

Je spočetná hustá množina v S vzhledem k σ_p. Skutečně, vol $x \in S$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $y_i \in H$ tak aby

$$(\forall i \in \hat{n})\rho_i(x_i, y_i) < n^{-1/p}\varepsilon.$$

Pak je

$$\sigma_p(x,y) \leqslant n^{1/p}\rho_\infty(x,y) < \varepsilon$$

Tedy H je spočetná hustá podmnožina S.

(i): Stačí ukázat, že S je sekvenciálně kompatkní. Buď $x_j \in S$ posloupnost. Protože $(x_j)_1 \in M_1$ lze vybrat podposloupnost x_j^1 tak, že $(x_j^1)_1$ je konvergentní v (M_1, ρ_1). Z této podposloupnosti vybereme podobně x_j^2 tak aby $(x_j^2)_2$ konvergovala v (M_2, ρ_2). Takto vybíráme dál až skončíme s posloupností $x_j^n \in S$ konvergentní ve všech souřadnicích. Označme

$$z = (z_1, z_2, \dots z_n),$$

kde

$$z_i := \lim_j (x_j^n)_i$$

Vol $\varepsilon > 0$ nalezneme n_0, aby

$$(\forall i \in \hat{n})(\forall j \geqslant n_0) \quad \rho_i(z_i, (x_j^n)_i) < n^{-1/p}\varepsilon.$$

Pak ovšem

$$\sigma_p(z, x_j^n) \leqslant n^{1/p}\sigma_\infty(z, x_j^n) < \varepsilon.$$

Tedy x_j^n konverguje k $z \in S$ ve metrice σ_p a tedy prostor (S, σ_p) je sekvenciálně komapktní.

(iii): Nechť $x_j \in S$ je Cauchyovská posloupnost v (S, σ_p). Pak je

$$\rho_i((x_l)_i, (x_m)_l) \leqslant \sigma(x_l, x_m)$$

z čehož dostáváme, že posloupnosti $(x_j)_i$ jsou Cauchyovské posloupnosti v prostorech (M_i, ρ_i) a tedy konvergentní. Označ

$$y_i := \lim_j (x_j)_i \quad y := (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Pak podobnými odhady jako u separability dostaneme, že

$$y = \lim_j x_j$$

v prostoru (S, σ_p). A tedy (S, σ_p) je úplný MP. □

Pozorování 11. (i) Jestliže $A \subset M$ je kompaktní pak $P_A(x)$ je neprázdná.
(ii) Pokud $x \in A$ pak je $P_A(x) = x$.
(iii) $p_A \circ p_A = p_A$.

Dalším pojmem, který budeme často používat je souvislost metrických prostorů. Potřebujeme tento pojem zadefinovat tak, abychom ho mohli používat pro všechny metické prostory a v běžných případech aby odpovídal naší běžné představě souvislosti. K tomu potřebujeme pojem *obojetné množiny*. Řekneme, že množina je *obojetná*, jestliže je uzavřená i otevřená.

Definice 70 (Souvislý prostor)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor.

(i) Řekneme, že je *souvislý*, jestliže jedinými obojetnými podmnožinami M jsou M a $\emptyset$.
(ii) Řekneme, že $A \subset M$ je souvislá, jestliže $(A, \rho|_{A\times A})$ je souvislý.
(iii) Řekneme, že $A \subset M$ je křivkově souvislá, jestliže pro každé $x, y \in A$ exsistuje spojitá křivka $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, A)$ tak, že $\langle\gamma\rangle \subset A$ a $\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$.

Pozorování 12. Jedinými souvislými podmnožinami $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jsou intervaly.

Věta 94 (Vztah křivkové souvislosti a souvislosti)**.** *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor a* $A \subset M$ *je křivkově souvislá. Pak* A *je souvislá.*

Důkaz. Nechť A není souvislá. Pak existuje neprázdná $O \subsetneq A$. Vol $x \in O$ a $y \in A \setminus O$. Buď φ křivka spojující x a y. Pak, ale pokud by byla spojitá pak by množiny definované jako

$$M_1 = \varphi^{-1}(O), \quad M_2 := \varphi(O \setminus A)$$

byly otevřená a protože jsou disjunktní a jejich sjednocení je interval $\langle 0, 1\rangle$, znamenalo by to, že jsou to obojetné neprázdné podmnožiny intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Tento interval je však souvislý, což je spor. □

Dokážeme tvrzení v poznámce 15 o ekvivalenci norem na vektorovém prostoru konečné dimenze.

Věta 95. *Nechť* $d \in \mathbb{N}$*,* $d > 0$*,* $\|\cdot\|_1$*,* $\|\cdot\|_2$ *normy na* $\mathbb{R}^d$*. Pak existuje* $C > 0$*, že pro* $v \in \mathbb{R}^d$ *platí*

$$\frac{1}{C}\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant C\|v\|_1$$

Důkaz. Pozorování: ekvivalence norem je relací ekvivalence na množině norem na daném vektorovém prostoru, a tedy stačí dokázat ekvivalenci každé normy $\|\cdot\|$ s maximovou normou $\|v\|_{max} := \max\{|v_k| : k \in \hat{d}\}$.

Jedna z dokazovaných nerovností je přímým důsledkem axiomů normy: vyjádřeme vektor v jako lineární kombinaci kanonické báze

$$v = \sum_{k=1}^{d} v_k e_k$$

Pak z axiomů normy plyne

$$\|v\| \leqslant \sum_{k=1}^{d} |v_k|\|e_k\|$$

a dále platí

$$\sum_{k=1}^{d} |v_k|\|e_k\| \leqslant \max\{\|e_k\| : k \in \hat{d}\}\|v\|_{max}$$

Druhou nerovnost dokážeme matematickou indukcí. Pro $d = 1$ zvolme libovolný nenulový vektor e_1. Všechny ostatní vektory jsou jeho násobky: $v = v_1 e_1$. Pak platí

$$\|v\| = |v_1|\|e_1\|$$

a tedy i

$$\|v\|_{max} = |v_1| \leqslant \frac{1}{\|e_1\|}\|v\|.$$

Dokažme indukční krok. Zvolme $i \in \hat{d}$ a označme $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$ a kanonickou bázi označme $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Z indukčního předpokladu pak plyne, že funkce

$$f(\bar{x}) = \|e_i - \sum_{k\neq i} x_k e_k\|$$

je spojitá na $\mathbb{R}^{d-1}$ vzhledem k jakékoliv metrice, a tedy nabývá minima na každé kompaktní množině. Naším cílem je ukázat, že nabývá minima na $\mathbb{R}^{d-1}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\|e_i - \sum_{k\neq i} x_k e_k\| \geqslant \|\sum_{k\neq i} x_k e_k\| - \|e_i\|$$

Z indukčního předpokladu pak plyne existence konatanty C, že platí

$$\|\sum_{k\neq i} x_k e_k\| \geqslant C\|\sum_{k\neq i} x_k e_k\|_{max}$$

a

$$C\|\sum_{k\neq i} x_k e_k\|_{max} = C\max\{|x_k| : k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, d\}$$

Mimo hyperkrychli $\|\bar{x}\|_{max} \geqslant \frac{2\|e_i\|}{C}$ platí

$$\|e_i - \sum_{k\neq i} x_k e_k\| \geqslant \|\sum_{k\neq i} x_k e_k\| - \|e_i\| \geqslant C\|\sum_{k\neq i} x_k e_k\|_{max} - \|e_i\| \geqslant C\frac{2\|e_i\|}{C} - \|e_i\| = \|e_i\|$$

Z $\|e_i\| = f(0)$ plyne, že minimum na hyperkrychli je minimem i na $\mathbb{R}^{d-1}$, a tedy existuje $v \in \mathbb{R}^{d-1}$, že pro $\bar{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$ je

$$f(x) \geqslant f(v)$$

Označme $f(v) = d_i$, platí $d_i > 0$ ($f(v)$ je norma nenulového vektoru).

Ukážeme, že pak

$$\|\sum_{k=1}^{d} v_k e_k\| \geqslant \min\{d_k : k \in \hat{d}\}\|v\|_{max} \tag{23}$$

Pro $v = o$ jsou obě strany nulové, proto nerovnost platí. Pro $v \neq o$ označme i, pro které je $|v_i| = \|v\|_{max}$. Pak

$$\|\sum_{k=1}^{d} v_k e_k\| = \|v\|_{max}\|e_i + \sum_{k\neq i} \frac{v_k}{\|v\|_{max}} e_k\|$$

a

$$\|e_i + \sum_{k\neq i} \frac{v_k}{\|v\|_{max}} e_k\| \geqslant d_i$$

Odtud plyne (23) a odtud tvrzení věty. □

18.1. **Příklady k procvičení.**

1. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou metriky na daných množinách (ukažte, že mají nebo nemají vlastnosti metriky)
   (a)
$$\rho_d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \neq y \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{24}$$
   Na libovolné neprázdné množině M.
   (b)
$$\rho(x,y) := \sqrt{|x^2 - y^2|}$$
   na $\mathbb{R}$.
   (c)
$$\rho_{max}(x,y) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i - y_i|\}$$
   na množině $\mathbb{R}^n$
   (d)
$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$
   na množině riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $(0,1)$.
   (e) Prostor spojitých funkcí s metrikou definovanou jak
$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$
2. Rozhodněte, zda platí. Pokud $f \in \mathcal{C}(M,S)$ pak
   - $A \subset M$ otevřená, pak je $f(A)$ otevřená
   - $A \subset M$ uzavřená, pak je i $f(A)$ uzavřená.
   - $A \subset M$ kompaktní pak i $f(A)$ je kompaktní.
3. Dokažte
   - $A^0 = M \setminus \overline{(M \setminus A)}$
   - $\overline{A} = M \setminus (M \setminus A)^0$
4. Nechť $(M,\rho), (S,\sigma), (P,\gamma)$ jsou metrické prostory a $f \in \mathrm{Lip}(M,S)$ a $g \in \mathrm{Lip}(S,P)$. Ukažte, že pak je $g \circ f \in \mathrm{Lip}(M,P)$.
5. Podobně ukažte, že složení dvou bilipchitzovských zobrazení je bilipchitzovské.
6. Pokud $(M,\rho), (S,\sigma), (P,\gamma)$ jsou metrické prostory a $g \in \mathcal{C}(M,S), f \in \mathcal{C}(S,P)$ pak $f \circ g \in \mathcal{C}(M,P)$. Dokažte.
7. Ukažte, že prostor polynomů na množině $(0,1)$ s funkcí definovanou předpisem
$$\rho(p,q) = \int_0^1 |p(x) - q(x)|$$
   je separabilní a není úplný.
8. Ukažte, že prostor omezených funkcí na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ s metrikou definovanou předpisem
$$\rho(f,g) := \sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f(x) - g(x)|$$
   není separabilní a je úplný.
9. Rozhodněte, zda množina lipchitzovských funkcí s konstantou 2 tvoří prekompaktní podmnožinu prostoru $(\mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle), \|\cdot\|_{\sup})$.
10. Ukažte, že pokud (M,ρ) je metrický prostor, pak $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\sup})$ (tedy prostor spojitých funkcí na M se supremovou metrikou) tvoří Banachův prostor.
11. Pomocí Bairovy věty ukažte, že existuje funkce definovaná na intervalu $(0,1)$, která nemá ani jednostrannou derivaci v ani jednom bodě. (ukažte, že množina takových funkcí je první kategorie v prostoru spojitých funkcí se supremovou metrikou)
12. Pomocí Bairovy věty ukažte, že iracionální čísla tvoří hustou množinu v $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_{eukl})$.

13. Ukažte, že je -li (M, ρ) úplný metrický prostor a $F \subset M$ je uzavřená, pak je $(F, \rho|_F)$ také úplný metrický prostor.
14. Ukažte, že je-li (M, ρ) úplný metrický prostor pak každá residuální množina je hustá v M.
15. Nalezněte nějakou nespočetnou řídkou podmnožinu $\mathbb{R}$.
16. Nechť $(M, \rho), (S, \sigma)$ jsou metrické prostory. Dokažte tvrzení: $f \in \mathcal{C}(M, S)$, právě když platí (K je kompaktní pak i $f(K)$ je kompaktní).
17. Dokažte, že každý uzavřený interval v $\mathbb{R}$ je kompaktní bez použití věty o ekvivalenci sekvenciální kompaktnosti a kompaktnosti.
18. Ukažte, že (X, ρ_d) je souvislý právě když X je jednobodová množina.
19. Ukažte, že platí pozorování 12.
20. Ukažte, že v metrickém prostoru (M, ρ), $x \in M$ je zobrazení $f(y) = \rho(x, y)$ spojité.
21. Ukažte, že v normovaném vektorovém prostoru $(V, \|\cdot\|)$ je zobrazení $f(v) = \|v\|$ spojité.

19. Funkce více proměnných

V této kapitole budeme pro $x \in \mathbb{R}^n$ značit

$$|x| = \|x\|_{eukl}.$$

Budeme-li hovořit o spojitosti či otevřenosti, resp. uzavřenosti množin budeme tyt pojmy používat vždy vzhledem k euklidovské metrice.

Věta 96. (i) *Prostor* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *je separabilní*
(ii) $K \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*
(iii) $x_n \to x$ *právě když* $(x_n)_i \to (x)_i$.

Důkaz. (i) Zřejmě $\mathbb{Q}^n$ je spočetná hustá podmnožina $\mathbb{R}^n$. (iii): Plyne z lemma6 (ii): množina □

19.1. Limity a spojitost.

Věta 97 (Nutná podmínka existence limit)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}^n$ *a* $\varphi : (c, d) \to D_f \setminus \{a\}$ *je spojitá křivka taková, že*

$$\lim_{t\to d} \varphi(t) = a$$

A nechť dále je

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Pak je

$$\lim_{t\to d} f((\varphi(t)) = L$$

19.2. Parciální derivace a totální diferenciál.

Definice 71 (Norma zobrazení)**.** Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $L : X \to Y$ zobrazení. Pak definujeme *operátorovou normu* tohoto zobrazení předpisem

$$\|L\|_{X\to Y} := \sup_{x\in X} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Definice 72. Pro normované lineární prostory X, Y budeme značit symbolem $\mathcal{L}(X, Y)$ normovaný lineární prostor všech lineárních zobrazení z prostoru X do Y vybavený operátorovou normou.

Pozorování 13. Budeme-li v dalším textu používat normu zobrazení, budeme tím myslet operátorovou normu zkráceně budeme značit jako $\|\cdot\|$. Matice $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ budeme chápat jako lineární zobrazeni z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ definované předpisem

$$L : u \mapsto Au$$

Normu matice pak budeme přirozeně chápat jako normu operátoru L.

Věta 98. *Pokud* h *je lineární forma na* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eukl})$ *pak existuje vektor* $v \in \mathbb{R}^n$ *tak, že*

$$h(u) = v.u \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n)$$

Platí

$$h(u) = v.u \leqslant \|v\|\|u\|$$

přičemž rovnost nastává právě když $v = \lambda u$.

Příklad 47.

Definice 73. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Derivací funkce* f *ve směru* u rozumíme

$$d_u f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Parciální derivací podle i-té proměnné budeme rozumět derivaci ve směru e_i, kde

$$e_i = (0, 0, \dots 0, 1, 0 \dots 0)$$

je i-tý kanonický vektor tedy funkci

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Pozorování 14. Všimněme si, že pro pevně zvolený bod $x \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení

$$L : u \mapsto d_u f(x)$$

homogení, tzn.

$$L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Definice 74 (Gradient, derivace, totální diferenciál)**.** Nechť funkce $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována na okolí bodu $x \in A$. Pak definujeme

(i) *gradient* funkce f v bodě x předpisem

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right);$$

(ii) *Totální diferenciál funkce f v bodě* x jako lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0.$$

(iii) Řekneme, že funkce f je v bodě x *diferencovatelná*, má-li v tomto bodě totální diferenciál.

Poznámka 18. Pro funkci $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ budeme gradientem rozumět matici v jejichž řádky jsou tvořeny gradienty jednotlivých složek vektorové funkce f.

Věta 99 (O aritmetice parciálních derivací)**.** *Nechť funkce* f, g *mají derivace ve směru* u *v bodě* $x \in \mathbb{R}^n$. *Pak platí*

(i)
$$d_u(f+g)(x) = d_u f(x) + d_u g(x)$$

(ii)
$$d_u(f.g)(x) = d_u f(x) g(x) + f(x) d_u g(x)$$

(iii)
$$d_u \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{d_u f(x) g(x) - f(x) d_u g(x)}{g^2(x)}$$

Důkaz. Definujme funkce

$$\varphi(t) := f(x+th), \quad \psi(t) := g(x+th)$$

Pak φ, ψ jsou funkce jedné proměnné diferencovatelné v bodě 0. Navíc

$$\varphi'(0) = d_h f(x) \quad \text{a} \quad \psi'(0) = d_h g(x).$$

Platnost dostáváme aplikací věty 28 na funkce φ, ψ v bodě 0. □

Věta 100 (O tvaru diferenciálu)**.** *Nechť* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je funkce diferencovatelná v bodě* $x \in A$. *pak je totální v bodě* x *diferenciál ve tvaru*

$$L(h) = h \cdot \nabla u(x).$$

Je-li navíc f *v* x *diferencovatelná, pak je zobrazení*

$$h \mapsto d_h f(x)$$

lineární.

Důkaz. Pokud je diferencovatelná pak, existuje zobrazení $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tak, že

$$f(x+h) - f(x) - L(h) \in o(|h|)$$

Označme

$$\varphi(t) := f(x+th)$$

Dle věty 41 aplikované na φ je tedy

$$L(h) = \varphi'(0) = d_h f(x)$$

tedy $h \mapsto d_h f(x)$ je lineární. Dále je

$$L(e_i) = \nabla u.e_i$$

jelikož se dvě lineární zobrazení shodují na bázi $\mathbb{R}^n$ musí už nutně být shodná. □

Pozorování 15. Z výše uvedeného tedy vyplývá, že pro libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^n$ a funkci u diferencovatelnou v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ je

$$u(a + th) = u(a) + t\nabla u(a).h + o(t).$$

Příklad 48.

Věta 101 (Řetízkové pravidlo)**.** *Nechť* $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *a* $f : g(A) \to \mathbb{R}^m$ *jsou diferencovatelné v bodě* $a \in A$*, resp.* $g(a)$*. Pak je*

$$\nabla(f \circ g)(a) = \nabla g(a) \cdot \nabla f(g(a)).$$

Důkaz. $\nabla(f \circ g)(a)$ a $\nabla g(a) \cdot \nabla f(g(a))$ jsou lineární formy na $\mathbb{R}^n$. K rovnosti stačí ukázat, že se rovnají jejich hodnoty ve vektorech kanonické báze e_i. Vol $i \in \hat{n}$. Stačí tedy ukázat, že

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g(a)$$

Vyjděme z definice a použijme pozorování 15

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(g(a + te_i)) - f(g(a))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(g(a) + t\frac{\partial g}{x_i}(a) + o(t)) - f(g(a))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(g(a)) + \nabla f(g(a)).\frac{\partial g}{\partial x_i} + o(t) - f(g(a))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \nabla f(g(a)).\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{o(t)}{t} \\
&= \nabla f(g(a)).\frac{\partial g}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g(a)
\end{aligned}$$

□

Příklad 49. Nechť funkce u je definována předpisem

$$u(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \\ \max\left\{0, x - \frac{|y-x^2|}{x}\right\} & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak u je spojitá v bodě $(0, 0)$. Dále

$$\nabla u(0, 0) = (0, 0, \dots, 0),$$

derivace ve všech směrech existují a jsou nulové ale u nemá v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál. Vol $h := (t, t^2)$ pak

$$|h| = \sqrt{t^2 + t^4} = |t|\sqrt{1 + t^2}$$

tedy $|h| \to 0$ jakmile $t \to 0$. Pokud by existoval tot. diferenciál muselo by platit

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{u(h) - L(h)}{|h|} = 0$$

ale dle věty o tvaru diferenciálu je $L(h) = 0$, tedy

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{u(h) - L(h)}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{u(h)}{|h|} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t\sqrt{t^2 + 1}} = 1.$$

což je spor.

Věta 102 (Postačitelná podmínka diferencovatelnosti)**.** *Nechť* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a nechť jsou funkce* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *spojité na okolí bodu* $a \in \Omega$*. Pak je* u *je diferencovatelná v bodě* a*.*

Důkaz. Vol $h \in \mathbb{R}^n$. Zvolme dále $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ tak aby

$$|\nabla u(x) - \nabla u(a)|n < \varepsilon$$

Označme $a_0 := a$ a pro $k \in \hat{n}$ $a_k := a_{k-1} + h_k.e_k$. Z Newton-Leibnitzovy formule dostaneme

$$\begin{aligned} u(a+h) - u(a) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e_k.\nabla u(x) dx \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e_k.|\nabla u(x) - \nabla u(a) dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e_k.(\nabla u(x) - \nabla u(a)) dx \\ &= \nabla u(a)h + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e_k.(\nabla u(x) - \nabla u(a)) dx \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} |u(a+h) - u(a) - \nabla u(a)h| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e_k.(\nabla u(x) - \nabla u(a)) dx \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\nabla u(x) - \nabla u(a)| dx \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |h_k|. \max_{B(a,\delta)} |\nabla u(x) - \nabla u(a)| \\ &\leqslant n|h| \max_{B(a,\delta)} |\nabla u(x) - \nabla u(a)| \\ &< |h|\varepsilon. \end{aligned}$$

Proto $|u(a+h) - u(a) - \nabla u(a)h| \in o(|h|)$ a tedy funkce je v bodě a diferencovatelná. □

Věta 103 (Rollova věta ve více dimenzích)**.** *Nechť Ω je omezená oblast a $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ je funkce diferencovatelná na Ω. Nechť navíc $u = 0$ na hranici Ω. Pak existuje $x \in \Omega$ tak, že*

$$\nabla u(x) = o.$$

Důkaz. Funkce je buď konstantní v takovém případě tvrzení zcela jistě platí, nebo

$$(\exists x \in \Omega) \quad u(x) > 0 \vee u(x) < 0.$$

Nechť bez ujmy na obecnosti nastane $u(x) > 0$. Pak existuje bod ve kterém se nabývá maxima. V tomto bodě už nutně platí

$$\nabla u(x) = o.$$

□

Věta 104 (Lagrangeova věta ve více dimenzích)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f : \Omega \subset\!\to \mathbb{R}$. Pak pro všechny $x, y \in \Omega$ existuje $\eta = tx + (1-t)y$, pro které je*

$$d_{x-y} f(\eta) = f(x) - f(y).$$

Důkaz. Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ definujme funkci

$$g(t) := |(1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)|$$

Tato funkce je diferencovatelná v bodech kde $g(t) \neq 0$ (rozmyslete si proč). Pokud je nulová není co dokazovat. V opačném případě existují $t_1, t_2 \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že

$$g(t_1) = g(t_2) = 0$$

a

$$g(t) > 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2).$$

Pak dle Rollovy věty existuje $s \in (t_1, t_2)$ s $g'(s) = 0$. Pak ale označíme-li $\eta := (1-s)x + sy$

$$g'(s) = f(y) - f(x) - \nabla f(\eta).(y - x) = 0$$

a tedy

$$d_{x-y}f(\eta) = f(x) - f(y).$$

□

Důsledek 7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pak f je lokálně lipchitzovská a pro $K \subset \Omega$ kompaktní platí odhad

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \max_{z \in K} |\nabla u(z)||x - y|$$

19.3. **Derivace vyšších řádů a vícedimenzionální Taylorův polynom.** Nechť n je přirozené. *Multi-indexem* budeme rozumět $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Výškou multiindexu* pak rozumíme hodnotu

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Derivací funkce u *podle multiindexu* α rozumíme parciální derivaci

$$\partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\dots\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} u(x)$$

mocninou podle multiindexu α čísla $x \in \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

Faktoriál multiindexu definujeme předpisem

$$\alpha! := \alpha_1!.\alpha_2!.\dots.\alpha_n!.$$

řádem derivace $\partial^\alpha u$ budeme rozumět výšku multi-indexu.

Polynomem budeme v dalším textu rozumět každou funkci, které se dá zapsat ve tvaru

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha x^\alpha$$

stupněm polynomu pak budeme rozumět maximální výšku multiindexu, jehož koeficient je nenulový. Množinu všech polynomů stupně nejvýše k budeme značit $\mathcal{P}_k$

Pozorování 16. $\mathcal{P}_k$ tvoří lineární prostor dimenze $\binom{n+k}{k-1}$

Definice 75 (Taylorův polynom)**.** Taylorovým polynomem stupně n funkce u v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ rozumíme funkci

$$T^k_{u,a}(x) := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \partial^\alpha u(a).\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}.$$

Věta 105 (Taylorova věta ve vyšší dimenzi)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *je funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní*

(i) u *je* k*-krát diferncovatelná.*

(ii)

$$f - T^k_{f,a} \in o(|x-a|^k)$$

Důkaz. □

19.4. **Extrémy funkcí více proměnných.**

Věta 106. *Nechť* $A \subset \mathbb{R}^n$ *je omezená uzavřená množina a* $f \in \mathcal{C}(A)$. *Pak* f *nabývá na* A *extrémů.*

Důkaz. Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená omezená pak dle věty pak je sekvenciálně kompaktní (rozmyslete za cvičení). Proto $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ nabývá na této množině maxima a minima dle věty 88. □

Definice 76. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f má *lokální minimum (resp. maximum)* v bodě $a \in M$, jestliže existuje $r > 0$ tak, že

$$f(a) \leqslant f(x) \quad (\mathrm{resp.} f(a) \geqslant f(x)) \quad (\forall x \in B(a, r)).$$

Hovoříme-li o lokálním extrému funkce více proměnných rozumíme tím automaticky lokální extrém na metrickém prostoru tvořeném definičním oborem funkce vybaveném Euklidovskou metrikou.

Věta 107 (Nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť* f *je funkce definovaná na okolí bodu* $a \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* f *nabývá v* a *lokálního extrému. Pro* $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *platí, že existuje-li v tomto směru derivace pak*

$$d_h f(a) = 0.$$

Speciálně, existují-li v tomto bodě parciální derivace, je

$$\nabla u(a) = 0. \tag{25}$$

Důkaz. Pro $i \in \hat{n}$ položme

$$\varphi_i(t) := u(a + te_i)$$

Vzhledem k tomu, že tato funkce musí mít v bodě 0 lokální extrém, máme dle věty11

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(a) = \varphi'(0) = 0$$

A tedy

$$\nabla u(a) = o.$$

□

Bodům splňujícím (25) budeme říkat stacionární body. Pokud je tedy v bodě extrém a existují v něm parciální derivace pak už je nutně stacionárním bodem.

Definice 77. Nechť $u : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Druhou derivací f budeme rozumět

$$\nabla^2 u := \nabla(\nabla u)$$

Podobně pro derivace vyšších řádů ($n > 2$) definujeme indukcí

$$\nabla^n u := \nabla(\nabla^{n-1} u).$$

V jedné dimenzi platí, že pokud má Taylorův polynom funkce f libovolného stupně ostrý extrém v bodě $a \in \mathbb{R}$ pak v má v bodě a ostrý extrém stejného typu. (ověřte jako cvičení). Ve vyšší dimenzi už tato věta bohužel neplatí.

Lemma 7. Nechť $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je polynom stupně nejvýše 2. Nechť P má v bodě $a \in \mathbb{R}$ ostrý lokální extrém. Pak existuje konstanta $C \in \mathbb{R}^+$ a $r > 0$ tak, že

$$P(x) - P(a) \geqslant C|x - a|^2 \quad \text{resp.} \quad P(a) - P(x) \leqslant C|x - a|^2 \tag{26}$$

pro všechna $x \in B(a, r)$.

Poznámka 19. Pro vyšší řády lemma neplatí. Například pro $k = 4$ položme

$$P(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + x_2^4.$$

Pak pro body na parabole $x_2 = x_1^2$ lemma evidentně neplatí.

Tvrzení 22. *Pokud Taylorův polynom v bodě* a *funkce u řádu* $k = 2$ *má v bodě* a *ostrý lokální extrém, pak funkce* u *má v tomto bodě ostrý lokální extrém stejného typu.*

Důkaz. Dle vícerozměrné verze Taylorovy věty je

$$u(x) = T^2_{u,a}(x) + o(|x - a|^2)$$

Nechť bez ujmy na obecnosti má $T^2_{u,a}$ v bodě a ostré lokální minimum. Pak dle lemma7 existuje $C > 0$ a $r > 0$ tak, že platí (26). Proto dle Taylorovy věty existuje $0 < s < r$ tak, že

$$|u(x) - T^k_{u,a}(x)| \leqslant \frac{C}{2}|x - a|^2$$

Pro $x \in B(a,s)$ z trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} u(x) - u(a) &\geqslant |T^2_{u,a}(x) - T^2_{u,a}(a)| - |u(x) - T^2_{u,a}(x)| \\ &\geqslant \frac{C}{2}|x-a|^2 \end{aligned}$$

a tedy v tomto bodě je ostré lokální minimum. □

Poznámka 20. Pro vyšší stupeň polynomu již toto tvrzení neplatí. Jako protipříklad uveďme pro $k = 4$ a body na parabole $x_2 = x_1^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + x_2^4 - 2(x_1^2 + x_2^2)^4.$$

Věta 108 (Postačující podmínky existence extrému)**.** *Nechť funkce* f *je třídy* $\mathcal{C}^2$ *na nějakém okolí bodu* $a \in A$*. Nechť dále* a *je její stacionární bod. Pak*

(i) *Pokud* A *je pozitivně definitní má funkce v bodě* a *lokální minimum.*
(ii) *Pokud* A *je negativně definitní má funkce v bodě* a *lokální minimum.*
(iii) *Pokud* A *je indefinitní nemá funkce v bodě* a *lokální extrém.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$a = o \wedge f(a) = 0$$

Nechť nejprve Hessova matice druhých derivací ∇^2 Protože o je stacionární bod a $a = o$ máme, že Taylorův polynom druhého stupně je tvaru

$$T_o^2 f(x) = (x\nabla^2 u(o))(\nabla^2(o)x).$$

Z pozitivní resp. negativní definitnosti matice $\nabla^2(o)$ vyplývá, že Taylorův polynom druhého stupně má v bodě o ostré lok. minimum resp. ostré lokální maximum v bodě o.

Nechť naopak matice $\nabla^2 f(o)$ je indefinitní. Pak existuje $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že

$$(u\nabla^2(o))(u\nabla^2(o)) < 0 \wedge (v\nabla^2(o))(v\nabla^2(o)) > 0$$

Pak

$$\varphi(t) := f(ut)$$

má v bodě 0 ostré lokální maximum, zatímco funkce

$$\psi(t) := f(vt)$$

má v bodě 0 ostré lokální minimum. Protože po jedné přímce má původní funkce v bodě nula ostré lok. maximum a po druhé přímce ostré lokální minimum, nemůže mít původní funkce v bodě o extrém. □

Definice 78. Stacionární bod funkce $f \in \mathcal{C}^2$, ve kterém není extrém budeme nazývat *sedlovým bodem.*

19.5. **Inverzní a implicitní funkce.**

Věta 109 (O implicitní funkci)**.** *Nechť* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a* $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n) = (\hat{x}, x_n)$ *a*

$$g(\hat{x}_0, x_0) = 0 \tag{27}$$

Nechť dále $g \in \mathcal{C}^k(U)$*, kde* U *je nějaké okolí* $(\hat{x}_0, x_0)$*, nechť dále*

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(\hat{x}_0, x_0) \neq 0.$$

Pak existuje okolí V *bodu* $\hat{x}_0, x_0$ *tak, že pro libovolné* $\hat{x}$ *existuje jediné* x_n *tak, že* $\hat{x}$ *a* x_n *splňují* (27)*.Označíme-li* x_n*, pro které* (27) *platí jako* $f(\hat{x})$ *pak navíc* $f \in \mathcal{C}^1(V)$ *a*

$$\nabla f(x) = -\frac{\nabla_{\hat{x}} g(\hat{x}, x)}{\partial_{x_n} g(\hat{x}, x)}.$$

Důkaz. □

19.6. **Vázané extrémy funkce více proměnných.** V následujícím textu se budeme zabývat nabýváním extrémů funkce více proměnných na množinách které jsou tvaru

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}, \tag{28}$$

kde $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je funkce vazby. Budeme tedy uvažovat problém hledání extrémů na takto definované množině. Pro tento problém sestrojíme tzv. *Lagrangeovu funkci*, která je dána předpisem

$$L_M^f(x, \lambda) := f(x) + \lambda . g(x). \tag{29}$$

Lemma 8 (O projekci)**.** Nechť X je unitární prostor a $W \subset\subset X$ je konečné dimenze. Pro každé $x \in X$ existuje $p_W(x)$ a navíc $p_W \in \mathcal{L}(X)$ a

$$\|p_W\|_{\mathcal{L}(X)} = 1.$$

Důkaz. K důkazu, že projekce exituje je nutné dokázat existenci a jednoznačnost nejbližšího bodu z W k zadanému $x \in X$. Nejprve existence:

Buď $w_1, w_2, \dots, w_n$ OG báze W. Definujme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(y) := \|(y.w) - x\|$$

(tedy vzdálenost bodu se souřadnicemi $y \in \mathbb{R}^n$ od x). Exituje $R > 0$ tak, že pokud $\|y\| > R$ pak $f(y) > x$.

$$M := \overline{B(x, R)}$$

je kompaktní množina, tedy funkce f která je spojitá na ní nabývá svého minima. Protože

$$\min_M f(y) \leqslant \|x\|$$

a vně této koule je hodnota příslušné funkce větší, je toto minimum globální na $\mathbb{R}^n$. Body, které ho realizují jsou body množiny $P_W(x)$.

Jenoznačnost: Uvědommě si, že pro libovolný $a \in P_W(x)$ je

$$x - a \perp h \quad (\forall h \in W).$$

Nechť existují dva body $a, b \in P_W(x)$, pak je $a, b \in W$ a tedy $a - b \in W$. Tedy $a - b \perp x - a$. Proto, je dle Pythagorovy věty

$$\|x - a\|^2 + \|a - b\|^2 = \|x - b\|^2$$

tedy pokud $\|x - b\| = \|x - a\|$ pak $\|a - b\| = 0$ a $a = b$. □

Lemma 9. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$ a $o \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Nechť $\operatorname{rank}(\nabla g(o)) = k$ a $h \in \nabla g(o)^{\perp}$ a

$$M := \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$$

Pak je

$$\operatorname{dist}(th, M) \in o(t).$$

Důkaz. Nechť $h \in \nabla g(0)^{\perp}$. Stačí ukázat, že pro nějaké $\delta > 0$ existuje $C > 0$ tak, že

$$\operatorname{dist}(th, M) \leqslant Cg(th)$$

Volme $\delta > 0$ dost malé, aby existovalo $0 < A < \infty$ tak, že

$$|x - y| \leqslant A(g(x) - g(y)) \quad (\forall x, y \in W \cap B(0, 6\delta))$$

a aby

$$\sup_{x < 6\delta} \|\nabla g(x) - \nabla g(0)\| \leqslant \frac{A}{4}. \tag{30}$$

Definujme posloupnost x_i induktivně

$$x_0 := th, \quad x_{l+1} = x_l - \lambda_l$$

kde $\lambda_l \in W$ je vektor, pro který je

$$g(x_l) = \lambda_l . \nabla g(0).$$

Označme
$$\varphi_l(t) := g(tx_{l+1} + (1-t)x_l).$$
Odhadněme
$$\begin{aligned}
|g(x_{l+1})| &= \left| g(x_l) + \int_0^1 \varphi_l'(t)\,\mathrm{d}\,t \right| \\
&= \left| g(x_l) + \int_0^1 (x_{l+1} - x_l).\nabla g(tx_{l+1} + (1-t)x_l)\,\mathrm{d}\,t \right| \\
&= \left| \int_0^1 (x_{l+1} - x_l).(\nabla g(tx_{l+1} + (1-t)x_l) - \nabla g(0))\,\mathrm{d}\,t \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in B(0,6\delta)} \|\nabla g(x) - \nabla g(0)\| |x_{l+1} - x_l| \\
&= \sup_{x\in B(0,6\delta)} \|\nabla g(x) - \nabla g(0)\| |\lambda_l| \\
&\leqslant \sup_{x\in B(0,6\delta)} \|\nabla g(x) - \nabla g(0)\| |g(x_l)|/A,
\end{aligned}$$
kde $A := \inf_{S_1\cap W} |\nabla g(0).x|$ a poslední nerovnost plyne z
$$|g(x_l)| = |\lambda_l.\nabla g(0)| \geqslant \inf_{S_1\cap W} |\nabla g(0).x||\lambda_l| = A|\lambda_l|.$$

Díky (30) máme
$$|g(x_{l+1})| \leqslant \frac{|g(x_l)|}{4}$$
Tedy
$$|g(x_l)| \leqslant 4^{-l}|g(x_0)|$$
Je
$$\begin{aligned}
|x_{l+1} - x_l| &\leqslant A|g(x_{l+1}) - g(x_l))| \\
&\leqslant \frac{5A}{4^l}|g(x_0)|
\end{aligned}$$
Tedy posloupnost x_n konverguje. Označme
$$L := \lim_n x_n$$
Pak je
$$g(L) = \lim_n g(x_n) = 0$$
tedy $L \in M$ dále
$$|x_0 - L| \leqslant |g(x_0)| 5A \sum_{i=0}^{\infty} 4^{-i} = \frac{20A}{3}|g(x_0)|$$
Proto
$$\operatorname{dist}(th, M) \leqslant |x_0 - L| \leqslant \frac{20A}{3}|g(x_0)| = \frac{20A}{3}|g(th)|.$$
□

Lemma 10. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$ a $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ a $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Nechť $\operatorname{rank}(\nabla g(a)) = k$ a $h \in \nabla g(a)^\perp$ a
$$M := \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$$
a v bodě $a \in M$ je lokální extrém vzhledem k M. Pak je
$$d_h f(a) = 0.$$

Důkaz. Nechť $h \in \nabla g(a)^\perp$. Nechť bez újmy na obecnosti je $a = 0$ a $f(0) = 0$. Existuje $r > 0$ tak, že

$$\operatorname{Lip}(f|_{B(x,r)}) = L < \infty$$

Vol $\varepsilon > 0$, dle předchozího lemma existuje $\delta > 0$ tak, že $\delta|h| < r$ a

$$\operatorname{dist}(M, th) < \varepsilon t|h| \quad (\forall t \in (-\delta, \delta))$$

Vol $t \in (-\delta, \delta)$. Existuje $M_t \in M$ tak, že

$$d_h f(0).t = f(th) - f(0) + \varepsilon t = f(M_t + th - M_t) - f(0) - \varepsilon|t| \geqslant f(M_t) - f(0) - L\varepsilon|t||h| - \varepsilon|t|$$

Tedy

$$d_h f(0)t \geqslant -\eta|t|$$

kde $\eta = \varepsilon(1 + L|h|) > 0$ je libovolně malá konstanta. Proto musí být

$$d_h f(0) = 0.$$

□

Věta 110 (O vázaných extrémech)**.** *Nechť* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je funkce a* M *je dána rovností* (28)*. Nechť* f *má v bodě* $a \in M \cap \Omega$ *extrém vzhledem k množině* M*. Nechť*

$$\operatorname{rank}(\nabla g(a)) = k.$$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^k$

$$\nabla L_M^f(a, \lambda) = o.$$

Důkaz. Existuje $\lambda \in \mathbb{R}^k$ tak, že

$$\nabla f(a) + \lambda \nabla g(a) \in \nabla g(a)^\perp$$

Tedy pro takto zvolené λ (položíme-li $h := \nabla f(a) + \lambda \nabla g(a)$) je dle lemma 10

$$\partial_{x_i} L_M^f(a) = 0 \quad (\forall i \in \hat{n})$$

Dále protože bod maxima splňuje rovnice vazby, je

$$g_j(a) = \partial_{\lambda_j} L_M^f(a) = 0 \quad (\forall j \in \hat{k})$$

a tedy

$$\nabla L_M^f(a) = o.$$

□

19.7. **Transformace souřadnic v $\mathbb{R}^n$.**

19.8. **Křivky v $\mathbb{R}^n$.**

Definice 79. Křivkou v $\mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že φ je

(i) spojitá, jestliže $\varphi \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle, \mathbb{R}^n)$
(ii) spojitě diferencovatelná pokud $\varphi \in \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle)$.

Délkou křivky budeme rozumět hodnotu

$$l(\varphi) := \sup_{(x_i)\text{dělení}<a,b>} \sum_i |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|.$$

Věta 111 (o délce křivky)**.** *Pokud* φ *je spojitě diferencovatelná křivka, pak je to křivka konečné délky a platí*

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \varphi_i'(t)^2}\, \mathrm{d}\, t.$$

Důkaz. Důkaz pouze naznačíme, jelikož jeho idea je podobná jako u délky křivky. Vol $\varepsilon > 0$ jelikož derivace funkce (v krajních bodech rozšíříme jednostrannou derivací) je stejnoměrně spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ nalezneme dostatečně malé $\delta > 0$, aby

$$|x-y| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} - \varphi'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Vezměme dělení interval $\langle a, b\rangle$ (t_i) s normou δ, pak

$$\left|\varphi'(t) - \frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1})$$

Nechť (z_i) je nějaké jiné konečné dělení pak

$$\sum_i |\varphi(z_{i+1}) - \varphi(z_i)| \leqslant \sum_i |\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)|$$

kde

$$\{s_i\} = \{t_i\} \cup \{z_i\}$$

je nejmenší společné zjemnění dělení t_i a z_i. Pak

$$\begin{aligned}\sum_i |\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)| &= \sum_i |s_{i+1} - s_i| \left|\frac{\varphi(s_{i+1})-\varphi(s_i)}{s_{i+1}-s_i}\right| \\ &\leqslant \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\varphi'(s) + \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \mathrm{d}\, s \\ &= \int_a^b |\varphi'(t) \,\mathrm{d}\, t| + \varepsilon\end{aligned}$$

Podobně se ukáže

$$\sum_i |\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)| \geqslant \int_a^b |\varphi'(t) \,\mathrm{d}\, t| + \varepsilon$$

Protože ε lze volit libovolně malé, pak už nutně

$$\sum_i |\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)| = \int_a^b |\varphi'(t) \,\mathrm{d}\, t|$$

□

Příklad 50 (Indukční cívka)**.** Uvažujme křivku

$$\begin{aligned}x &= \max\{0, (1-t^2)^3\} \sin(50\pi t) \\ y &= \max\{0, (1-t^2)^3\} \sin(50\pi t) \\ z &= t\end{aligned}$$

kde $t \in \langle -2, 2\rangle$.

Cvičení 16. Ukažte, že pro indukční cívku neexistuje bod $\eta \in (-1, 1)$ tak, že

$$\varphi'(\eta) = \frac{\varphi(1) - \varphi(2)}{2}$$

Tedy jinými slovy, že verze Lagrangeovy věty pro vektorové funkce neplatí.

Věta 112. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast. Nechť dále existuje L tak, že pro každé dva body $x, y \in \Omega$ existuje rektifikovatelná křivka $\varphi : [0, 1]$ délky nejvýše L tak, že*

$$\varphi(0) = x, \quad \varphi(1) = y.$$

Necht $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ a $x_0 \in \Omega$. Pak platí odhad

$$|u(y)| \leqslant L \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| + |u(x_0)|$$

Důkaz. Vol $y \in \Omega$. Nechť φ je křivka délky nejvýše L, která spojuje body x_0, y pak z Newton-Leibnitzovy formule je

$$\begin{aligned}
|u(y)| &\leqslant |u(y) - u(x_0)| + |u(x_0)| \\
&= \left| \int_a^b \nabla u(\varphi(s))\varphi'(s)\, \mathrm{d}\, s \right| + |u(x_0)| \\
&\leqslant \int_a^b |\nabla u(\varphi(s))|\varphi'(s)\, \mathrm{d}\, s + |u(x_0)| \\
&\leqslant L \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| + |u(x_0)|.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 21. Z věty ihned vyplývá, že v případě splnění podmínky s propojením libovolných dvou bodů křivkou konečné délky je každá funkce s omezeným gradientem omezená. Toto platí pro širokou třídu množin například pro každou konvexní množinu. Nadruhou stranu, pokud podmínka splněna není můžeme nalézt i funkci s omezeným gradientem, která je na omezené oblasti neomezená, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 51 (Silnice do nebe)**.** Nechť

$$\Omega = \left\{ (x, y) : x = r \cos t, y = r \sin t : 1/t < r < \frac{1}{t - 1/t}, t > \pi \right\}$$

Pozorujme, že Ω je omezená oblast (souvislá otevřená množina). Položme

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &:= \left(\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t} \right) \\
\psi(t) &:= \left(\frac{\cos t}{t - 1/t}, \frac{\sin t}{t - 1/t} \right)
\end{aligned}$$

Označme

$$v(x, y) = \ln \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

Následně definujme $u(x, y)$ tak, aby

$$u(x, y) := v(\varphi(t)) \text{ pro } x, y \in \operatorname{co}(\varphi(t), \psi(t)).$$

Takto je u definována jednoznačně na Ω a $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Zřejmě

$$\nabla v(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

pak je pro každé (x, y) existuje $t > 0$ tak, že

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x, y)| &\leqslant |\nabla v(\varphi(t)).\varphi'(t)| \\
&\leqslant |\nabla v(\varphi(t))|.|\varphi'(t)| \\
&\leqslant 2t.\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2} \\
&\leqslant \frac{2\sqrt{\pi^2 + 1}}{\pi}.
\end{aligned}$$

Tedy gradient funkce u je omezený a přesto funkce je neomezená protože $o \in \Omega'$.

19.9. **Příklady k propočítání.**

1. Určete D_f a rozhodněte, zda je lze spojitě dodefinovat na množině $\overline{D_f}$, je-li
 (a)
$$f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2)$$
 (b)
$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$
 (c)
$$f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$$
 (d)
$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{|y|}\right)$$
2. Spočtěte limity (případně ukažte, že neexistují)
$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right), \quad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$
 je-li
 (a)
$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}, \quad x_0 = 0, y_0 = a$$
 (b)
$$f(x,y) = \frac{|x+y|}{1-e^{x^2+y^2}} \quad x_0 = y_0 = 0$$
 (c)
$$f(x,y) = \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} \quad x_0 = 1, y_0 = 0$$
 (d)
$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}, \quad x_0 = y_0 = 0,$$
3. Načrtněte následující množiny v rovině a zjistěte, které z nich jsou otevřené či uzavřené $(\mathbb{R}^2, \rho_{eukl})$.
 (a)
$$M = \{(x,y) : x+y \leqslant 1 \wedge x^2-4y^2 \leqslant 2\}$$
 (b)
$$M = \{(x,y) : \sqrt{x+y} < 5\}$$
 (c)
$$M = \{(x,y) : \sin x \cos y > 0\}$$
 (d)
$$M = \left\{(x,y) : \arctan(xy) \geqslant \frac{\pi}{3}\right\}$$
4. Nalezněte funkci, která je spojitá v jednom bodě po všech přímkách, ale není v daném bodě spojitá.
5. * Nalezněte funkci, která je spojitá po všech přímkách, ale není spojitá.
6. Nalezněte funkci, která má v bodě $(0,0)$ dvojnou limitu, tzn.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
 existuje, ale neexistují
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \quad \text{ani} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$
7. Nalezněte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je spojitá na husté podmnožině $\mathbb{R}^2$ a zároveň je na husté podmnožině $\mathbb{R}^2$ nespojitá.

8. Nalezněte funkci $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má limitu v 0 ale $f \circ \varphi$ není spojitá pro žádnou spojitou křivku s koncovým bodem 0.
9. ** Nechť $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a A je uzavřená omezená konvexní množina. Ukažte, že funkci lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$. Tzn. existuje $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá tak, že
$$F|_A = f.$$
10. Zjistěte, ve kterých bodech jsou zadané funkce diferencovatelné a určete jejich deiferenciál, je-li
   (i)
$$f(x, y) = \arctan(x^2 + 2y^2) + \arcsin(\sin x)$$
   (ii)
$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x + y}{y - z}\right)$$
   (iii)
$$f(x, y, z) = \arcsin(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$
   (iv)
$$f(x, y) = e^{|x|y+|y|x}$$
   (v)
$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } (x, y, z) = (0, 0, 0) \\ \frac{(x-2y+z)^3}{x^2+y^2+2z^2} & \text{jinak} \end{cases}$$
11. Gramofonová deska se přehraje za čas T. Deska má tvar mezikruží s rozměry $r_1 < r_2$ a točí se úhlovou rychlostí ω. Když se deska otáčí přenoska se po desce pohybuje rovnoměrně. Spočítejte, jak široká je brázda.

20. Posloupnosti a řady funkcí

Definice 80 (Bodová konvergence)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Buďte $f_n : M \to \mathbb{R}$ reálné funkce. Řekneme, že posloupnost funkcí konverguje bodově k funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jestliže pro všechna $x \in M$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall n_0 > n)$$

funkci f nazveme bodovou limitou posloupnosti funkcí f_n. Tento fakt zapisujeme jako $f_n \to f$

Tvrzení 23. *Existuje-li bodová limita posloupnosti funkcí f_n, pak je určena jednoznačně.*

Důkaz. Vol $x \in M$ protože $f_n(x)$ je posloupnost je její limita určena jednoznačně. Pak označíme-li ji jako $f(x)$ pak funkce $x \mapsto f(x)$ je určena jednoznačne pro všechna $x \in M$. $\square$

Příklad 52. (i) $f_n(x) := x^n$, $M = (0, 1)$ pak $f_n \to 0$.
(ii) $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $M = \mathbb{R}$ pak $f_n \to e^x$.

Definice 81 (Stejnoměrná konvergence)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí $f_n : M \to \mathbb{R}$

(i) *konverguje stejnoměrně k funkci* f, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 přirozené tak, že pro všechna $x \in M$ je
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall n \geqslant n_0)$$
Píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

(ii) Pokud existuje f tak, že $f_n \rightrightarrows f$ řekneme, že posloupnost funkcí f_n je *stejnoměrně konvergentní.*

(iii) Řekneme, že f_n *konvergují lokálně stejnoměrně k* f, jestliže
$$f_n|_K \rightrightarrows f|_K$$
pro každou kompaktní $K \subset M$. Píšeme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

Pozorování 17. Pokud $f_n \rightrightarrows f$, pak $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ a pokud $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ pak i $f_n \to f$.

Příklad 53. Pro $M = \langle 0, 1\rangle$ Definujme
$$f_n(x) := x^n$$
Pak
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
je bodovou limitou posloupnosti funkcí f_n. Příklad ukazuje, že bodová limita spojitých funkcí nemusí být spojitá. Dále omezíme-li se pouze na interval $(0, 1)$, vidíme, že posloupnost funkcí f_n na tomto intervalu nekonverguje k 0 uniformě, což je vidět zvolíme-li
$$x_n := \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$
pak je zřejmě $x_n \in (0, 1)$ ale
$$f_n(x_n) = \frac{1}{2} > 0$$
tedy posloupnost nekonverguje stejnoměrně k nulové funkci (což je vzhledem k tomu, že je to bodová limita dle pozorování jediný kandidát na limitu). Nadruhou stranu, pokud $K \subset (0, 1)$ je kompaktní pak existuje $\delta > 0$ tak, že $K \subset (\delta, 1 - \delta)$ a tedy
$$|f_n(x)| \leqslant (1 - \delta)^n \quad (\forall x \in K)$$
a tedy $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na intervalu $(0, 1)$.

Tvrzení 24. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Posloupnost funkcí $f_n : M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně konvergentní na M, právě když je stejnoměrně Cauchyovská (tzn. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 přirozené tak, že pro všechna $n, m \geqslant n_0$ a $x \in M$ je*
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Věta 113. *Nechť* (M,ρ) *je lokálně kompaktní metrický prostor,* $f_n \in \mathcal{C}(M)$ *je posloupnost a* $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$. *Pak je* $f \in \mathcal{C}(I)$.

Důkaz. Vol $x \in M$ a $\varepsilon > 0$. Existuje $r > 0$ tak, že $\overline{B(x,r)} \subset M$ je kompaktní. Tvrdíme

$$m_n = \max_{y \in B(x,r)} |f_n(y) - f(y)| \to 0$$

Máme

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Vol nejprve n tak, aby $m_n < \varepsilon$. Dále vol $\delta > 0$ tak malé, aby

$$\sup_{B(x,\delta)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Pak pro všechna $y \in B(x,\delta)$ je

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

□

Uvažujme dále vektorový prostor $\mathcal{C}(M)$ spojitých funkcí na M, kde sčítání je definováno jako

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

a násobení jako

$$(af)(x) = a.f(x).$$

Věta 114. *Na množině spojitých reálných funkcí na metrickém prostoru* M $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ *definujme*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Pak $\|\cdot\|_\infty$ *je norma na* $\mathcal{C}(I)$ *a dvojice* $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ *tvoří Banachův prostor.*

Důkaz. Vol $x \in M$ pak je

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Přechodem k supremu na levé straně dostaneme

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Tedy trojúhelníková nerovnost platí. Dále zřejmě

$$\|af\|_\infty = |a|\|f\|_\infty.$$

Zbývá ukázat úplnost. Zřejmě existuje bodová limita (viz věta 13). Označme ji f. Vol $x \in M$. Zvolme n tak aby

$$|f_m - f_n| < \varepsilon \quad \forall m > n$$

Pak nalezneme m přirozené, aby

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

je

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Protože x bzlo voleno libovolně máme

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Věta 115 (Moore-Osgood)**.** *Nechť* (M,ρ) *je metrický prostor,* $x_0 \in M$. *Nechť dále* $f_n : M \to \mathbb{R}$ *je posloupnost funkcí, pro kterou platí*

(i) *Existuje* $r > 0$ *tak, že* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $B(x_0,r) \setminus \{x_0\}$

(ii)

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že a_n konverguje. Předpokládejme pro spor, že nekonverguje. Pak existuje $\varepsilon > 0$ a vybraná podposloupnost b_n z a_n tak, že

$$|b_n - b_m| > \varepsilon.$$

Vybereme z f_n podposloupnost funkcí g_n příslušných k b_n. Pak zřejmě

$$\|(g_n - g_m)\chi_{B(x_0,r)\setminus\{x_0\}}\|_\infty > \varepsilon$$

tedy dostáváme se do sporu s (i). Označme

$$L := \lim_n a_n.$$

Zvolme n dost velké, aby pro všechna $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ platilo

$$|a_n - L| < \varepsilon \wedge |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Pro toto n zvolme $\delta \in (0, r)$ dost malé, aby pro všechna $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ platilo

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon.$$

Vol $x \in B(x_0, \delta)$. Pak je

$$\begin{aligned}|f(x) - L| &\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - L| \\ &\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

□

Věta 116 (Dini)**.** *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor,* $f_n \in \mathcal{C}(M)$ *je posloupnost funkcí a* $f \in \mathcal{C}(M)$ *nechť dále*

$$f_n(x) \downarrow f(x) \vee f_n(x) \uparrow f(x) \quad \forall x \in M$$

Pak f_n *konvergují lokálně stejnoměrně k* f *na* M*.*

Důkaz. Vol $K \subset M$ kompaktní. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $f = 0$ a $f_n \downarrow 0$. Pokud f_n nekonverguje stejnoměrně k 0 na K. Pak existuje podposloupnost g_n tak, že existují $x_n \in K$

$$g_n(x_n) > \varepsilon > 0.$$

Vzhledem k monotonii konvergence je

$$g_n(x_k) > \varepsilon$$

pokud $k > n$. Vzhledem ke kompaktnosti K můžeme předpokládat, že $x_n \to x$. Odhadněme

$$f(x) \geqslant g_n(x_k) - |g_n(x_k) - g_n(x)| - |g_n(x) - f(x)|$$

Nejprve volme n tak aby poslední člen byl menší než $\frac{\varepsilon}{3}$ dále vol k dost velké, aby druhý člen byl menší než $\frac{\varepsilon}{3}$ proto

$$f(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

a to je spor. □

V následujícím tvrzení budeme potřebovat o něco silnější pojem, než křivková souvislost, který budeme nazývat konečná souvislost. Řekneme, že množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je *konečně souvislá*, jestliže existuje L takové, že každé dva body můžeme spojit křivkou délky nejvýše L jejíž obraz je podmnožinou Ω.

Věta 117. *Nechť* f_n *je posloupnost diferencovatelných funkcí na* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je omezená křivkově souvislá oblast a nechť* $\nabla f_n \rightrightarrows g$ *a existuje* $x_0 \in \Omega$ *tak, že* $f_n(x_0)$ *je konvergentní. Pak* $f_n \rightrightarrows f$*.*

Důkaz. Vol $\varepsilon > 0$. Vol $y \in \Omega$. Nalezneme křivku délky nejvýše L spojující x_0 a y. Můžeme předpokládat, že $\gamma \in \mathcal{C}^1(\langle 0, 1\rangle, \mathbb{R}^n)$ a $|\gamma'(t)| = L$. Máme odhad

$$\begin{aligned}
|f_n(y) - f(y)| &= |f_n(x_0) + \int_0^1 \nabla f_n(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}\,t - f_n(x_0) - \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}\,t| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + |\int_0^1 \nabla f_n(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}\,t| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + L\int_0^1 |\nabla f_n(\gamma(t)) - \nabla f(\gamma(t))|\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

□

Věta 118 (Arsele-Ascoliho věta)**.** *Nechť* (M, ρ) *je kompaktní metrický prostor a* (S, σ) *je lokálně kompaktní metrický prostor (každá omezená množina je prekompaktní). Nechť* $X = (\mathcal{C}(M, S), \eta)$, *kde*

$$\eta(f, g) := \sup_{x \in M} \sigma(f(x), g(x))$$

je metrický prostor a $A \subset X$ *je množina funkcí, pro kterou platí*

(i)
$$(\exists r > 0)(\exists y \in S)(\forall f \in A) : f(M) \subset B(y, r)$$
(stejnoměrná omezenost v MP)

(ii)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in A) : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
(stejnoměrná spojitost v MP)

Pak A *je prekompaktní množina v prostoru* $(\mathcal{C}(M, S), \eta)$

Důkaz. Dle věty 84 stačí ukázat, že z každé posloupnosti funkcí $f_n \in A$ lze vybrat Cauchyovskou. Vol $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ dost malé, aby

$$\sigma(f(x), g(x)) < \varepsilon$$

jakmile $\rho(x, y) < \delta$. K tomuto δ nalezneme konečnou δ-síť $(x_n)_{n=1}^k$. Protože z $f_n(x_1)$ je prekompaktní množina, vyberme $f_{n,1}$ tak aby $f_{n,1}(x_1)$ byla cauchyovská. Z $f_{n,1}$ vyberme dále $f_{n,2}$ tak, aby $f_{n,2}(x_2)$ byla cauchyovská. Vybírejme dále podobně z $f_{n,i}$ posloupnost $f_{n,i+1}(x_{i+1})$ byla cauchyovská. Označme

$$z_n := f_{n,k}$$

Tvrdíme, že $z_{n,k}$ je stejnoměrně cauchyovská. Skutečně vol $x \in M$ nalezneme $l \in \hat{k}$ aby $\rho(x_l, x) < \delta$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, aby $\sigma(z_n(x_l), z_m(x_l)) < \varepsilon$ jakmile $m, n \geqslant n_0$. Pak je

$$\eta(z_n, z_m) < \sigma(z_n(x), z_n(x_l)) + \sigma(z_n(x_l), z_m(x_l)) + \sigma(z_m(x_l), z_m(x)) \leqslant 3\varepsilon$$

a tedy posloupnost je cauchyovská. □

Věta 119 (Stone-Weierstrassova věta)**.** *Nechť* (M, ρ) *je kompaktní metrický prostor. Nechť* $\mathcal{A} \subset\subset \mathcal{C}(M)$ *je množina funkcí splňující*

(i) *Pro všechny* $x, y \in M$ *existuje* $f \in \mathcal{A}$ *tak, že*
$$f(x) \neq f(y)$$
(ii) $\mathcal{A}$ *obsahuje všechny konstantní funkce na* M

(iii) *Platí*
$$f, g \in \mathcal{A} \quad \text{pak} \quad \max\{f, g\} \in \mathcal{A}$$
nebo
$$f, g \in \mathcal{A} \quad \text{pak} \quad f.g \in \mathcal{A}.$$

Pak $\mathcal{A}$ *je hustá podmnožina* $(\mathcal{C}(M), \|\cdot\|_\infty)$.

Důkaz. Nechť nejprve platí první podmínka. □

Důsledek 8. Nechť $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ pak existuje posloupnost polynomů P_n tak , že

$$P_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f.$$

Nedostatkem tohoto výsledku je, že ačkoliv nám říká, že aproximace existuje nedává návod jak konkrétně danou funkci aproximovat. Konkrétní aproximaci dostaneme pomocí Bernsteinových polynomů (viz []).

Definice 82 (Bernsteinovy polynomy)**.** Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a $f \in \mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ definujeme

$$\mathcal{B}_n f(x) := \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Věta 120 (Bernsteinova věta)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ *pak*

$$\mathcal{B}_n f \rightrightarrows f.$$

Důkaz. □

V následující větě budeme potřebovat pojem monotónní operátor. Řekneme, že operátor $T : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ je monotónní, jestliže pro všechny $f \in \mathcal{C}(I)$ je

$$Tf.f \geqslant 0.$$

Věta 121 (Korovkinova věta)**.** *Nechť* $T_n : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ *jsou lineární monotónní operátor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $L_n f \rightrightarrows f$ *pro všechny* $f \in \mathcal{C}(I)$
(ii) $L_n f \rightrightarrows f$ *pro* $f \in \{1, x, x^2\}$.

Definice 83. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Nechť $A \subset \mathcal{C}(M)$. Řekneme, že

(i) A je *stejnoměrně omezená*, jestliže existuje $C \in \mathbb{R}$ pro které
$$(\forall x \in M)(\forall f \in A)|f(x)| \leqslant C$$
(ii) A je *stejnoměrně spojitá*
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in A)\,[\rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

20.1. **Příklady k procvičení.**

21. Obyčejné diferenciální rovnice

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{k(n+1)+1}$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu* rozumíme úlohu

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots y', y, x) = 0 \tag{31}$$

s případnou počáteční podmínkou

$$y^{(n)}(x_0) = y_n, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \dots y(x_0) = y_0. \tag{32}$$

Definice 84 (Maximální řešení dif. rovnice)**.** *Řešením diferenciální rovnice* rozumíme každou dvojici (y, I), kde funkce $y : I \to \mathbb{R}$ splňuje (31) (případně ješte (32)). Pokud navíc řešení nelze rozšířit na žádný striktně větší (ve smyslu inkluze) $\tilde{I} \supset I$, pak řekneme, že dvojice (y, I) je *maximální řešení* (31) případně jeeště splňující počáteční podmínku (32).

21.1. **Diferenciální rovnice prvního řádu.** Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu v explicitním tvaru rozumíme speciální tvar (31)

$$y'(x) = f(y, x) \tag{33}$$

S případnou poč. podmínkou

$$y(x_0) = y_0 \tag{34}$$

Lemma 11. Nechť $x_0 \in I$, $y \in \mathcal{C}^1(I)$ a f je spojitá na $(I, y(I))$. Pak (y, I) je řešení (33) s počáteční podmínkou (34), právě když platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}\,x \tag{35}$$

Důkaz. Vyhovuje-li funkce y diferenciální rovnici se zadanou počáteční podmínkou, pak z Newton-Leibnitzovy formule (viz. věta 55) dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(x)\,\mathrm{d}\,x = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}\,x.$$

Nadruhou stranu platí-li (35) je evidentně splněna počáteční podmínka a derivací dané rovnice dostaneme (33). □

Lemma 12 (O lepení řešení dif. rovnic)**.** Nechť $I = (a, b), J = (b, c)$ jsou intervaly a nechť $(y_1, I), (y_2, J)$ jsou řešením dif. rce. (36). Nechť dále f je spojitá a

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = L$$

definujme y předpisem

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x) & \text{pro } x \in (a, b) \\ L & \text{pro } x = b \\ y_2(x) & \text{pro } x \in (b, c) \end{cases}$$

Pak dvojice $(y, (a, c))$ je řešením (36)

Důkaz. Použijeme-li lemma 4. Funkce y je podle něj primitivní funkcí k funkci $f(x, y(x))$ na intervalu (a, c) navíc snadno zkontrolujeme, že platí $y(x_0) = y_0$ a tedy platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}\,x.$$

Proto, dle předchozího lemma, je takto definovaná funkce řešením zadané diferenciální rovnice. □

Věta 122 (Peanova o existenci řešení)**.** *Nechť je dána ob. dif. rce. prvního řádu v explicitním tvaru, tzn.*

$$y'(x) = f(y, x) \tag{36}$$

nechť $(x_0, y_0) \in \Omega$ *a* f *je spojitá na* Ω *vzhledem k* y*. Pak existuje* $\delta > 0$ $y_l \in \mathcal{C}^1(I_\delta)$ *tak, že* (y_l, I_δ) *je řešením rovnice* (36) *splňující* (32) *(tedy v tomto případě* $y(x_0) = y_0$*, kde* $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*)*

Důkaz. K důkazu existence (alespoň lokálního) řešení diferenciální rovnice (36) využijeme lemma 11. Nejprve definujeme posloupnost funkcí, o které ukážeme, že konverguje v prostoru spojitých funkcí se supremovou metrikou a následně ukážeme pomocí lemma 11, že výsledná funkce musí být řešením problému. Důkaz pro přehlednost rozdělíme na několik kroků.

Krok 1 - konstrukce aproximační posloupnosti: Definujme posloupnost pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ položme

$$x_{n,k} := x_0 + k.2^{-n}$$

Dále induktivně definujme

$$y_n(x_0) := y_0 \wedge y_n(x_{n,k+1}) := y_n(x_{n,k}) + 2^{-n} f(x_{n,k}, y_{n,k})$$

V bodech mimo body $x_{n,k}$ dodefinujeme funkci y_n lineárně (tzn. pokud $x = \lambda x_{n,k+1} + (1-\lambda)x_{n,k}$ pak položíme

$$y_n(x) := \lambda y_n(x_{n,k+1}) + (1-\lambda) y_n(x_{n,k}).$$

Krok 2 - konvergence aproximační posloupnosti. Protože f je spojitá na okolí bodu $z_0 = (x_0, y_0)$ pak existuje kompaktní $K \subset \Omega$ obsahující nějaké okolí bodu z_0. Označme

$$M := \max_{z \in K} |f(z)|$$

Dále pro malé $\eta > 0$ označme

$$\varphi(\eta) := \sup\{|f(z) - f(\tilde{z})| : z, \tilde{z} \in K \wedge |z - \tilde{z}| < \eta\}$$

Protože f je na K stejnoměrně spojitá víme, že

$$\lim_{\eta \to 0+} \varphi(\eta) = 0.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti a faktu, že

$$\mathrm{Lip}(y) \leqslant M$$

vyplývá

$$|y_n(x)| \leqslant |y_0| + M|x - x_0| \leqslant |y_0| + M\delta,$$

pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dále platí

$$|y_n(x) - y_n(\tilde{x})| \leqslant M|x - \tilde{x}|$$

pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Tedy posloupnost je stejnoměrně spojitá. Tudíž dle věty 118 lze vybrat konvergentní podposloupnost. Označme ji u_n.

Krok 3-Limita aproximační posloupnosti řeší rovnici. Vol $\varepsilon > 0$ libovolně. Je

$$|u(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x, u(x))| \leqslant |u_n(x) - u(x)| + \\ + \left| u_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x, u_n(x)) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} f(x, u(x)) - f(x, u_n(x)) \, \mathrm{d}x \right|$$

Teď zvolme n dost velké, aby

$$\|u_n - u\|_\infty < \varepsilon$$

a

$$\delta \varphi(2^{-n}(1 + M)) < \varepsilon$$

a

$$\varphi(\|u_n - u\|) < \varepsilon$$

Pak je

$$|u(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x, u(x))| < 3\varepsilon.$$

a protože ε je libovolně malé, je

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, u(x))$$

a tedy funkce u řeší zadanou rovnici na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. $\square$

Věta 123 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť je dána ob. dif. rce. prvního řádu v explicitním tvaru, tzn.*(36) *nechť* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *a* f *je lokálně lipchitzovská na* Ω *vzhledem k* y*. Pak existuje* $\delta > 0$ $y_l \in \mathcal{C}^1(I_\delta)$ *tak, že* (y_l, I_δ) *je jediným řešením rovnice* (36) *splňující* (32) *(tedy v tomto případě* $y(x_0) = y_0$*, kde* $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*)*

Důkaz. Vol G otevřenou a K kompaktní množinu tak, aby $(x_0, y_0) \in G \subset K \subset \Omega$. Na prostoru $(\mathcal{C}((x_0 - \delta, x_0 + \delta)), \|\cdot\|_\infty)$ definujme operátor

$$Ty(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,d\,x$$

Dle lemma 11 je y řešením rovnice, právě když je pevným bodem zobrazení T.

Označme dále L konstantu Lipchitzovskosti funkce f v proměnné y na množině K. Pokud

$$\delta < \frac{1}{2L}$$

pak je $y, z \in \mathcal{C}((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ máme odhad

$$\begin{aligned}\|Ty - Tz\|_\infty &= \int_{x_0}^{x} f(x, y(x)) - f(x, z(x))\,d\,x \\ &\leqslant L \int_{x_0}^{x} |y(x) - z(x)|\,d\,x \\ &\leqslant L|x - x_0|\|z - y\|_\infty \\ &\leqslant L\delta\|z - y\|_\infty \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|z - y\|_\infty.\end{aligned}$$

A tedy zobrazení T je kontrakcí na prostoru $(\mathcal{C}(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \|\cdot\|_\infty)$, má proto dle věty 90 jediný pevný bod. A tedy rovnice se zadanou podmínkou má na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ jediné řešení. □

21.2. **Rovnice se separovanými proměnnými.** Je dána rovnice typu

$$y' = h(y)f(x) \tag{37}$$

Tento typ rovnice, či rovnici, kterou lze úpravami do tohoto tvaru převést nazýváme *rovnici se separovanými proměnými.*

Věta 124 (o řešení rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Nechť* f, h *jsou spojité funkce na* I *resp. na* J *a* h *je navíc nenulová, nechť* F, H *jsou primitivní funkce k* f *resp.* $1/h$*. Nechť dále*

$$F(I) + c \subset H(J)$$

Pak dvojice

$$(H^{-1}(F(x) + c), I)$$

je řešením rovnice (37)*. Řešení se zadanou podmínkou* $y(x_0) = y_0$*, kde* y_0 *není nulový bod funkce* h *je navíc lokálně jednoznačné.*

Důkaz. Důkaz plyne ihned z Picardovy věty (viz. věta 123). Ponecháváme jej proto jako jednoduché cvičení čtenáři. □

K nalezení všech maximálních řešení rovnice (37) je možno použít následující algoritmus.

Algoritmus 2.
(1) Určíme definiční obor funkce f a tím i max. intervaly na kterých je možné hledat řešení.
(2) Nalezneme nulové body funkce h. Je-li $h(c) = 0$, pak je funkce $y = c$ stacionární řešení rovnice (37).
(3) Nalezneme maximální intervaly, na kterých je funkce h nenulová.
(4) Dle věty o řešení nalezneme řešení (36) s oborem hodnot uvnitř těchto intervalů.
(5) Zafixujeme c a pro tuto konstantu nalezneme maximální intervaly pro které je $F(I)+c \subset H(J)$ (kde J je z kroku 3).
(6) Řešení, která lze navázat dle lemma 12 nalepíme na stacionární řešení tak, abychom dostali maximální řešení.

21.3. **Lineární a Bernouliovy rovnice.** Lineární diferenciální rovnicí budeme rozumět rovnici typu

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{38}$$

Lineární rovnici lze převést na rovnici se separovanými proměnnými dvěma způsoby. Buď lze použít *Metodu integračního faktoru.* Tu provedeme tak, že vynásobíme rovnici tzv. integračním faktorem tzn. funkcí $e^{A(x)}$, kde

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Dostaneme

$$y'e^{A(x)} + ya(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}b(x).$$

Rovnice je ekvivalentní s

$$(ye^{A(x)})' = e^{A(x)}b(x)$$

Řešením rovnice je pak

$$y = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}b(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

Nebo můžeme postupovat metodou *variace konstant.* V tomto postupu nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$y_h' + a(x)y_h = 0$$

Následně hledáme řešení rovnice (38) ve tvaru

$$y = y_h.z.$$

Rovnici tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha},$$

kde $\alpha \notin \{0, 1\}$ nazýváme *Bernouliovou rovnicí.* Pokud $\alpha > 0$ existuje nulové stacionární řešení. Nenulové řešení nalezneme pomocí substituce

$$z = y^{1-\alpha},$$

která převede Bernouliovu rovnici na lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Pokud $\alpha \in (0, 1)$ je možné nenulové řešení nalepit na nulové dle lemma o lepení a dostat tak maximální řešení.

21.4. **Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů.** V následující části se budeme zabývat *lineárními diferenciálními rovnicemi vyšších řádů s konstantními koeficienty* tedy rovnicemi ve tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = a(x). \tag{39}$$

Uvažujme dále homogenní úlohu danou rovnicí

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{40}$$

Věta 125 (O tvaru řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů)**.** *Množina všech řešení rovnice* (40) *tvoří vektorový prostor dimenze* n*. Pokud* y_p *je řešení* (39)*, pak všechna řešení* (39) *jsou ve tvaru*

$$y = y_p + y_h,$$

kde y_h *je řešení homogenní úlohy* (40)*.*

Důkaz. Jsou-li y_1, y_2 řešení (39) pak platí Označme

$$\mathcal{D}y = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

Pak $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^n, \mathcal{C})$. Vzhledem k linearitě operátoru, je ho jádro tedy množina

$$\ker(\mathcal{D}) = \{y : \mathcal{D}y = 0\}$$

tvoří lineární prostor. Dále označíme li y_p řešení a $y_h \in \ker(\mathcal{D})$ pak je

$$\mathcal{D}(y_p + y_h) = \mathcal{D}(y_p) + \mathcal{D}(y_h) = a(x) + 0 = a(x)$$

tedy $y_p + y_h$ řeší (39). Nadruhou stranu pokud y_p, y řeší (39) pak

$$\mathcal{D}(y - y_p) = \mathcal{D}(y) - \mathcal{D}(y_p) = a(x) - a(x) = 0.$$

tedy $y_h = y_p - y$ řeší (40). □

Definice 85. (i) Bázi prostoru řešení úlohy (40) budeme nazývat *fundamentální systém řešení.*

(ii) Charakteristickým polynomem úlohy (40) budeme rozumět polynom

$$P(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 126 (O kořenech polynomu)**.** *Nechť* P *je polynom s reálnými koeficienty, nechť* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k\}$ *je množina všech kořenů (i případně komplexních). Pak*

(i) *Jsou-li* $i_1, i_2, \ldots i_k$ *jejich násobnosti, pak*

$$\sum_{j=1}^{k} i_j = n$$

(ii) *Pokud* $\lambda = a + bi$ *kde* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *je kořen násobnosti* k *pak i* $\overline{\lambda} = a - bi$ *je kořen násobnosti* k.

Věta 127 (O tvaru FS)**.** (i) *Pokud* λ *je* k*-násobný kořen, jsou funkce* $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots x^{k-1}e^{\lambda x}$ *řešení problému* (39)

(ii) *Pokud* $\lambda = a \pm ib$ *jsou kořeny polynomu* P *pak funkce* $e^{ax}\cos(bx)$ *a* $e^{ax}\sin(bx)$ *jsou řešením úlohy* (40).

21.5. **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic.**

21.6. **Přibližné metody řešení ODR.**

21.7. **Příklady k procvičení.** Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice a následně max. řešení splňující zadanou počáteční podmínku.

1.
$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(1) = -1$$
2.
$$y' = 3x^2y^2, y(0) = 1$$
3.
$$y' = \frac{(1+y^2)x}{x^2+1}, y(0) = -1$$
4.
$$y' = \frac{2\sqrt{y}}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{\pi^2}{16}$$
5.
$$y' = \frac{2xy^2}{1-x^2} \quad y(0) = 1$$
6.
$$y' = \frac{1-x}{y} \quad y(0) = -1$$
7.
$$y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{9}$$
8.
$$xy' + 2y = e^{2x} \quad y(1) = \frac{e^2}{4} + 1$$
9.
$$y'(x^2 + y^2) = 2xy$$
10.
$$xy' - y = x^3e^x, \quad y(1) = \frac{e}{2}$$
11.
$$xy' + 4y = 3xy^2$$
12.
$$y''' - 3y' + 2y = e^x$$
13.
$$y'' + 2y' + y = e^{-x} + x$$
14.
$$\begin{aligned} y' &= y - z + e^x \\ z' &= -y + 2z - u + 2e^{-2x} \\ u' &= -z + u + 3e^{2x} \end{aligned}$$
15.
$$\begin{aligned} y' &= y + 2z + 3u + e^{-x} \\ z' &= 2y + 4y + 6u + e^x \\ u' &= 3y + 6z + 9u + 1 \end{aligned}$$
16. Pomocí diferenciální rovnice popište pohyb mechanické oscilace pružiny
17. Nalezněte rovnici popisující svislý pohyb tělesa v nehomogenním gravitačním poli.
18. ** Odvoďte systém rovnic popisující pohyb planet po oběžných drahách kolem slunce (úlohu řeště tak, že budete uvažovat pouze vzájemné působení planety a Slunce a zanedbáte všechny ostatní gravitační vlivy)
19. Diferenciální rovnicí popište závislost dráhy na čase při volném pádu, kde započítáváme odpor vzduchu, přičemž odpor vzduchu je úměrný čtverci rychlosti.
20. V přehradě na řece se uvolnilo M kilogramů jedovaté látky a okamžitě se v ni rozpustilo. Z přehrady o objemu vody V_1 začal odtékat jedovatý roztok do přehrady o objemu V_2 pod ní. Nalezněte funkci popisující koncentraci jedovaté látky v přehradě v čase t a určete její maximum.

22. Více-rozměrný Riemannův integrál

V následujícím textu budeme potřebovat zavést míru množin v n dimenzionálním prostoru. Abychom to udělali definujme obdelníky. Obdélníkem v $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět každou množinu tvaru

$$R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

Množinu všech obdélníků budeme značit symbolem $\mathcal{O}$ Pro $R \in \mathcal{O}$ označme

$$V(R) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Definice 86. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je množina definujme

$$\overline{J}(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} V(R_i) : R_i \text{ pokrývá } A \right\},$$

podobně

$$\underline{J}(A) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} V(R_i) : A \text{ pokrývá } R_i \right\}.$$

Pokud $\overline{J}(A) = \underline{J}(A)$ pak řekneme, že množina je J-měřitelná a položíme

$$J(A) := \overline{J}(A).$$

Hodnotu $J(A)$ budeme nazývat *Jordan-Peanovým objemem množiny* A.

Tvrzení 25. *Pokud* A *a* A_1, A_2 *jsou* J*-měřitelné pak*

(i) $\mathbb{R}^n \setminus A$ *je* J*-měřitelná;*
(ii) $A_1 \cup A_2$ *je* J*-měřitelná;*
(iii) $A_1 \cap A_2$ *je* J*-měřitelná.*

Z předchozího indukcí snadno vyplývá, libovolná konečná sjednocení či průniky jsou opět měřitelné množiny. Ted potřebujeme ukázat, že třída měřitelných množin je dostatečně široká. K tomu slouží následující věta.

Věta 128. *Každá otevřená množina je* J*-měřitelná.*

Definice 87. Jednoduchou funkcí rozumíme funkci ve tvaru

$$s := \sum_{j=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$$

kde A_i jsou J-měřitelné množiny. Pro takovéto funkce definujeme

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)\,dx := \sum_{j=1}^{k} a_i J(a_i).$$

Pro funkci $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definujeme

$$Df_k := \frac{\lfloor kf \rfloor}{k}$$

a

$$Hf_k := \frac{\lceil kf \rceil}{k}$$

Definice 88 (Měř. funkce)**.** Řekneme, že funkce f je J-měřitelná, jestliže pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}^n$ jsou

$$f^{-1}(\alpha, \infty)$$

j-měřitelné množiny.

V následujícím oddíle budeme hovořit o po částech spojitých funkcích. Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je po částech spojitá, jestliže existují $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_k$ tak, že

$$\bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j = \Omega$$

a $f|_{\Omega_j}$ jsou spojité funkce.

Tvrzení 26. *Každá po částech spojitá funkce je* J*-měřitelná.*

Definice 89. Pro měřitelnou funkci $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definujeme *Riemannův vícerozměrný integrál*

$$(\mathcal{R}) \int_A f(x)\, \mathrm{d}\, x := \sup_k \left\{ \int_A H f_k \, \mathrm{d}\, x \right\}.$$

Příklad 54. Uvažme Dirichletovu funkci

$$f := \chi_{\mathbb{Q}^n}$$

pak f není J-měřitelná funkce

Věta 129. *Nechť* $K \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní množina* $f : K \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce, pak*

$$(\mathcal{R}) \int_K f(x)\, \mathrm{d}\, x \in \mathbb{R}$$

Věta 130 (Fubiniova věta pro Riemannův integrál)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je* J*-měřitelná funkce. Pak je*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x)\, \mathrm{d}\, \tilde{x}_i \, \mathrm{d}\, x_i,$$

kde

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$$

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je funkce, jejíž každá složka je diferencovatelná na $\mathbb{R}^n$. Pro takovouto funkci definujeme *Jakobián* předpisem

$$J_\varphi(x) := \det(\nabla \varphi).$$

Věta 131 (Substituce pro vícerozměrný integrál)**.** *Nechť* $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ *jsou otevřené množiny a* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *je integrovatelná funkce. Nechť* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je spojitě diferencovatelná funkce a*

$$J_\varphi(x) \neq 0.$$

Pak je

$$\int_\Omega f(x) J_\varphi(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{\tilde{\Omega}} f(x)\, \mathrm{d}\, x.$$

23. Početní metody - ukázkové řešené příklady

23.1. Limity posloupností.

Řešený příklad 1. *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \tag{41}$$

Postup: Na první pohled dělá problém výraz $\sin(n!)$ tím, že osciluje mezi 1 a -1, pokusíme se s ním tedy vypořádat. Známe nejvyšší a nejnižší hodnotu funkce sin, nabízí se tedy použít větu o dvou policajtech (8) a určit limity horního a dolního odhadu celého výrazu. Až na $\sin(n!)$ je výraz (41) kladný, dolní odhad tedy získáme nahrazením $\sin(n!)$ hodnotou -1 a horní odhad nahrazením hodnotou 1. Máme

$$\frac{-\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}.$$

(I) **Řešení limity dolního odhadu:** Dosadit ještě nelze, dostali bychom výraz ve tvaru "$\frac{\infty}{\infty}$", pokusíme se tedy "porovnat" čitatele a jmenovatele - tato úprava je poměrně častá. Provedeme to vytknutím nejvyšší možné mocniny n z čitatele a jmenovatele. Jde nám o to z každého vytknout člen, který roste nejrychleji, a následně vytknuté členy pokrátit či vypočítat limitu jejich podílu. Budeme tedy postupovat takto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot(-1)}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\cdot\frac{-1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{-1}{1+\frac{1}{n}} = 0\cdot\frac{-1}{1+0} = 0.$$

Při výpočtu jsme využili toho, že pokud je čitatel reálné číslo a jmenovatel jde k nekonečnu, pak celý zlomek jde k nule.

(II) **Řešení limity horního odhadu:** Limitu budeme řešit naprosto obdobně

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot(1)}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

Protože limity obou odhadů vyšly stejně a jelikož hodnota našeho původního výrazu musí ležet mezi nimi, bude dle věty o dvou policajtech (8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0.$$

Řešený příklad 2. *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{n\to\infty} n^3 - 100n^2 - 1,0001^n \tag{42}$$

Postup: Řešení bude spočívat opět v určitém "porovnání" - ze tří členů výrazu (42) chceme vytknout ten, který bude nejrychleji růst. Tím dostaneme zlomky, přičemž ty se "slabšími" (pomaleji rostoucími) členy v čitateli půjdou k nule. Exponenciální posloupnost o základu větším než 1 poroste rychleji než libovolná mocnina. Vytkneme proto z celého výrazu (42) člen $1,0001^n$, víme totiž, že poroste nejrychleji.

$$\lim_{n\to\infty} 1,0001^n\cdot\left(\frac{n^3}{1,0001^n} - \frac{100n^2}{1,0001^n} - 1\right) = \infty\cdot(0-100\cdot 0-1) = -\infty.$$

Poznámka: Jiný přístup k postupu by mohl být pokusit se napasovat výraz na nějaký vzoreček. Špatně se nám vypořádává s výrazem $1,0001^n$ a pro práci s konstantou na n-tou máme vzorec $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\alpha^n} = 0$, pokusili bychom se tedy tomuto tvaru přiblížit vydělením celého výrazu (42) výrazem $1,0001^n$.

Řešený příklad 3. *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+10n+1} \tag{43}$$

Postup: Problematická na tomto příkladu je n-tá odmocnina z výrazu, který opět obsahuje n. Potřebujeme se odmocniny nějak zbavit, čehož dosáhneme zlogaritmováním výrazu. Zlogaritmování využívá faktu, že přirozený logaritmus je funkce inverzní k funkci exponenciální, pro libovolné kladné $x \in \mathbb{R}$ tedy platí $x = e^{\ln x}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 10n + 1} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln (n^5+10n+1)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln (n^5+10n+1)}.$$

Využili jsme přitom vzorce $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$ (známý ze střední školy).

Abychom dále mohli počítat samostatně limitu v exponentu, využijeme faktu, že funkce $f(x) := e^x$ je spojitá, platí tedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Úplné zdůvodnění vychází z Heineho věty (19) z kapitoly limity funkcí, která tuto kapitolu následuje.

Pro úplnost si toto zdůvodnění uvedeme: Funkce $f(x) := e^x$ *je definována pro každé* $x \in \mathbb{R}^*$*. Podle Heineho věty jsou tedy pro libovolné číslo* $a \in \mathbb{R}^*$ *následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *a*
(ii) *Pro každou posloupnost* $x_n \to a$ *(*$x_n \neq a$*) platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

V našem případě máme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}\ln(n^5 + 10n + 1)$ *a limitu ve tvaru (ii) - tedy* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$*. Jelikož je* $f(x)$ *spojitá, musí platit (ii). Díky Heineho větě tedy musí platit i (i)* $\lim_{x\to a} f(x) = L$*. Navíc jelikož naše funkce* $f(x)$ *je spojitá a definována i pro* a*, tak bude platit* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Dále tedy budeme počítat následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n^5 + 10n + 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^5 + 10n + 1)}{n}. \tag{44}$$

Na první pohled se výraz (44) díky logaritmu zdá problematický, ale po přepsání na zlomek vypadá výraz vhodně na použití Stolzovy věty (15). Abychom ji mohli použít, potřebujeme 3 věci:

(i) tvar $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, kde x_n a y_n jsou reálné posloupnosti,
(ii) y_n je rostoucí a
(iii) $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.

V našem případě první podmínku výraz (44) splňuje ($x_n = \ln(n^5 + 10n + 1)$ a $y_n = n$). Dále posloupnost y_n je rostoucí a její limita je nekonečno, výraz (44) tedy splňuje všechny podmínky Stolzovy věty a lze ji uplatnit:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(n^5 + 10n + 1\right)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[(n+1)^5 + 10(n+1) + 1\right] - \ln\left(n^5 + 10n + 1\right)}{n + 1 - n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left[(n+1)^5 + 10(n+1) + 1\right] - \ln\left(n^5 + 10n + 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{(n+1)^5 + 10(n+1) + 1}{n^5 + 10n + 1}.
\end{aligned}$$

V posledním kroku jsme uplatnili další známý vzorec pro práci s logaritmy - $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$. Nyní bychom mohli vše roznásobit ručně a vypočítat limitu jako obvykle vytknutím největší mocniny n, ale zde si usnadníme práci tak, že místo vytýkání stejného výrazu z jmenovatele a čitatele (např. n^5), vytkneme z jmenovatele n^5 a z čitatele $(n+1)^5$

$$\begin{aligned}
= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{(n+1)^5 \cdot \left[1 + \frac{10}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+1)^5}\right]}{n^5 \cdot \left(1 + \frac{10}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)} &= \lim_{n\to\infty} \ln \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1 + \frac{10}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+1)^5}}{1 + \frac{10}{n^4} + \frac{1}{n^5}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln \left[\left(\frac{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \cdot 1}\right)^5 \cdot \frac{1 + \frac{10}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+1)^5}}{1 + \frac{10}{n^4} + \frac{1}{n^5}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5}{1} \cdot \frac{1 + \frac{10}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+1)^5}}{1 + \frac{10}{n^4} + \frac{1}{n^5}}\right) \\
&= \ln \left(\frac{(1+0)^5}{1} \cdot \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0}\right) = \ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

Limitu (44) tedy máme, stačí již dosadit zpět:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n^5+10n+1)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(n^5+10n+1)} = e^0 = 1.$$

Alternativní postup: Ukážeme si ještě rychlejší postup, který je méně mechanický a více na zamyšlení. Z důkazu (4.1) víme, že $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, což nám poměrně připomíná náš výraz. Můžeme se ho tedy pokusit podobně jako v důkazu odhadnout a využít větu o dvou policajtech (8).

Dolní odhad bude jednoduše 1 jako ve zmíněném důkazu - opět máme totiž kladnou odmocninu z čísla většího než 1. Pro horní odhad se potom chceme zbavit polynomu pod odmocninou, abychom měli jen nějaké jedno n^k a mohli využít zmíněnou známou limitu. Nahradíme proto $10n$ výrazem $10n^5$ a 1 výrazem n^5. Máme tedy následující odhady:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n^5+10n+1} \leqslant \sqrt[n]{n^5+10n^5+n^5} = \sqrt[n]{12n^5}.$$

Limita dolního odhadu je evidentně 1. Limitu horního odhadu již budeme řešit běžným způsobem s využitím $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{12n^5} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{12}\cdot\sqrt[n]{n^5} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{12}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 = 1\cdot 1^5 = 1.$$

Limity obou odhadů vyšly shodně. Jelikož náš výraz leží mezi nimi, jeho limita musí být také 1. *Poznámka:* Výraz $\sqrt[n]{n^5+10n+1}$ lze odhadnout i vytknutím $\sqrt[n]{n^5}$ a vynecháním n-té odmocniny nad $1+\frac{10}{n^4}+\frac{1}{n^5}$:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n^5+10n+1} \leqslant \sqrt[n]{n^5}\cdot\left(1+\frac{10}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right).$$

Řešený příklad 4. *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n 3^n + 2^{2n+1}}{4^{n+1}+10n\cdot 2^n} \tag{45}$$

Postup: Prvním problémem je výraz $(-1)^n$ proto, že střídá své znaménko. Opět bychom mohli použít větu o dvou policistech, odhadnout $(-1)^n$ jako -1 a 1, ale ukážeme si zde jiný postup. Z naší původní posloupnosti, říkejme jí a_n, vybereme dvě posloupnosti - posloupnost sudých členů, kterou označíme a_{2n}, a posloupnost lichých členů, kterou označíme a_{2n+1}. V posloupnosti a_{2n} bude tedy výraz $(-1)^n$ vždy 1 a podobně v posloupnosti a_{2n+1} bude výraz $(-1)^n$ vždy -1. Dále stačí určit limitu každé z vybraných posloupností. Pokud budou stejné, pak limita a_n bude také stejná, pokud budou rozdílné, bude to znamenat, že je posloupnost a_n divergentní. Nejprve řešme posloupnost sudých členů - místo n všude dosadíme 2n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}3^{2n}+2^{2\cdot(2n)+1}}{4^{2n+1}+10\cdot 2n\cdot 2^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+2^{4n+1}}{4^{2n+1}+20n\cdot 2^{2n}}.$$

Víme, že n v exponentu je "silnější", než n na libovolnou mocninu - vypovídá o tom vzorec $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\alpha^n} = 0$. Jak bylo zmíněno, když "porovnáváme" čitatele a jmenovatele, jde nám o to z obou vytknout nejsilnější (= nejrychleji rostoucí) člen. Tedy i když zde máme n, vytkneme člen s n v exponentu. Nejprve se ale zbavíme součtů v exponentech a srovnáme koeficienty u n, která se vyskytují v exponentech:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+2\cdot 2^{2^{2n}}}{4\cdot 4^{2n}+20n\cdot 2^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n}}{4^{2n}}\cdot\frac{\frac{3^{2n}}{4^{2n}}+2\cdot\frac{4^{2n}}{4^{2n}}}{4\cdot\frac{4^{2n}}{4^{2n}}+\frac{20n\cdot 2^{2n}}{4^{2n}}}.$$

Nyní zlomky pokrátíme a využijeme základní limity, obzvláště $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $|a| < 1$ a dále ještě větu o srovnání polynominálního a exponenciálního růstu (pro $\alpha > 1$ je $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\alpha^n} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}+2\cdot 1}{4\cdot 1+20\cdot\frac{n}{2^{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^n+2}{4+20\cdot\frac{n}{4^n}} = \frac{0+2}{4+20\cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

Nyní musíme ještě celý výpočet obdobně zopakovat pro posloupnost lichých členů, zkráceně:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}3^{2n+1}+2^{2\cdot(2n+1)+1}}{4^{2n+1+1}+10(2n+1)\cdot 2^{2n+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)\cdot 3^{2n+1}+2^{4n+3}}{4^{2n+2}+20n\cdot 2^{2n+1}+10\cdot 2^{2n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-3)\cdot 3^{2n}+8\cdot 4^{2n}}{16\cdot 4^{2n}+40n\cdot 2^{2n}+20\cdot 2^{2n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n}}{4^{2n}}\cdot\frac{(-3)\cdot\frac{3^{2n}}{4^{2n}}+8}{16+\frac{40n}{2^{2n}}+\frac{20}{2^{2n}}}\\ &= \frac{(-3)\cdot 0+8}{16+0+0}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Limity vybraných posloupností a_{2n} a a_{2n+1} se shodují, limita (45) je tedy $\frac{1}{2}$.

Poznámka: Při prvotním zápisu vybraných posloupností je vhodné nejprve pečlivě každé n nahradit potřebným výrazem zapsaným v závorce (tedy $(2n)$, $(2n+1)$...). Pokud se při výpočtu snažíme rovnou výraz zjednodušovat a upravovat, často dochází k chybám.

Alternativní postup: Rychlejším řešením by bylo uvědomit si, že člen s $(-1)^n$ není ten nejsilnější a rovnou vytknout nejsilnější možný člen, kterým je 4^{2n}. Při výpočtu jinak budeme postupovat naprosto obdobně:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n3^n+2\cdot 4^n}{4\cdot 4^n+10n\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot\left(\frac{(-3)^n}{4^n}+2\cdot\frac{4^n}{4^n}\right)}{4^n\cdot\left(4\cdot\frac{4^n}{4^n}+\frac{10n\cdot 2^n}{4^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{-3}{4}\right)^n+2}{4+\frac{10n}{2^n}}=\frac{0+2}{4+10\cdot 0}=\frac{1}{2}.$$

23.2. **Limity funkcí jedné proměnné.**

Řešený příklad 5. *Spočtěte limitu*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} \tag{46}$$

Postup: Pokusíme-li se dosadit, dostaneme neurčitý výraz "$\frac{0}{0}$". Pokud se nám toto stane u zlomku obsahujícího polynomy, snažíme se z nich vytknout nějaký problematický výraz, který pro $x\to 2$ jde k nule. Rozložíme polynomy na součin (odhadem)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-2}$$

a výraz ještě zjednodušíme odstraněním neznámé z čitatele

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}1-\frac{1}{x-2}.$$

Nyní použijeme větu o aritmetice limit (9) a rozdělíme rozdíl na dvě samostatné limity:

$$\lim_{x\to 2}1-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=1-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}.$$

Zbývá nám jedna limita. Dosazením za x dostaneme nulu ve jmenovateli. V čitateli je však reálné číslo. V takovémto případě může limita být $\infty, -\infty$, nebo neexistuje. Zjistíme to vyšetřením jednostranných limit:

- Limita zprava je
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=\infty.$$
- Limita zleva je
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$$

Limity se liší, podle tvrzení o jednoznačnosti limity (9) limita pro $x\to 2$ tedy neexistuje, funkce by totiž musela mít dvě různé limity pro jednu hodnotu x. Proto také limita (46) neexistuje.

Řešený příklad 6. *Spočtěte limitu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{x} \tag{47}$$

Postup: Prostým dosazením za x vychází neurčitý výraz "$\frac{0}{0}$", musíme tedy postupovat jinak. Problematická je pro nás funkce tangens tím, že pro práci s ní nemáme vzorce. Problém je i x ve jmenovateli, neboť jde k nule. Vidíme, že tvar limity je podobný základní limitě $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Využijeme tedy definici tangens $\left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$ a výsledný výraz rozdělíme pomocí věty o aritmetice limit (9)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(5x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$$

Nyní využijeme spojitosti funkce cosinus podle věty o spojitosti základních funkcí (25). Jistě existuje epsilon tak, že pro každé $x \in U_\varepsilon(0)$ platí $\cos(5x) \neq 0$. Pak také $f(x) := \frac{1}{\cos(5x)}$ je spojitá funkce na tomto epsilonovém okolí nuly. Tedy podle charakterizace spojitosti (věta (23), ii) platí $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Levou limitu tedy můžeme vyřešit prostým dosazením, máme

$$\frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$$

Zbývající limita ještě nemá požadovaný tvar pro napasování na základní limitu - chceme ve jmenovateli a uvnitř funkce sinus stejný výraz, proto zlomek rozšíříme

$$\lim_{x\to 0} \frac{5}{5} \cdot \frac{\sin(5x)}{x} = 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}.$$

Pomocí věty o aritmetice limit (9) jsme z limity rovnou vytknuli konstantu 5. Nyní, abychom měli opravdu tvar $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$, použijeme větu o limitě složené funkce (20) - naše vnitřní funkce bude $y(x) = 5x$. Máme tedy

$$5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(y(x)\right)}{y(x)}.$$

Abychom větu mohli použít, výraz musí splnit alespoň jednu z dvou podmínek této věty:

(1) Vnější funkce je definovaná v limitě vnitřní funkce - pro naši vnitřní funkci je $\lim_{x\to 0} 5x = 0$, ale dosazením $y(x) = 0$ dostaneme nulu ve jmenovateli, funkce zde tedy není definována.
(2) Funkce $y(x)$ se nerovná své limitě na nějakém prstencovém okolí bodu ve kterém má tuto limitu (v našem případě 0) - funkce $y(x) = 5x$ se na okolí nuly rozhodně nerovná 0, tuto podmínku tedy splňuje a větu můžeme použít.

Dosadíme tedy y místo $y(x)$ a limitu přepíšeme z $\lim_{x\to 0}$ na $\lim_{y\to \lim_{x\to 0} y(x)}$, v našem případě tedy $\lim_{y\to 0}$. Po dosazení dostaneme přímo tvar základní limity, snadno tedy již určíme výsledek:

$$5 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Řešený příklad 7. *Spočtěte limitu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} \tag{48}$$

Postup: Tvar této limity nám připomíná základní limitu $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, pokusíme se tedy dostat na tento tvar. K tomu využijeme dvou vzorečků:

(1) Jelikož logaritmus je funkce inverzní k funkci exponenciální, platí $a = e^{\ln a} \qquad a \in (0; \infty)$
(2) Pro logaritmus platí $\log_b a^k = k \cdot \log_b a \qquad a \in (0; \infty), k \in \mathbb{R}$

Nejprve se tedy "zbavíme" 3^x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln 3^x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cdot \ln 3} - 1}{x}.$$

Nyní chceme, aby výraz ve jmenovateli odpovídal výrazu v exponentu a tvar celého výrazu tak odpovídal tvaru základní limity. Rozšíříme tedy zlomek:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 3}{\ln 3}\cdot\frac{e^{x\cdot\ln 3}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\ln 3\cdot\frac{e^{x\cdot\ln 3}-1}{x\cdot\ln 3}=\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\ln 3}-1}{x\cdot\ln 3}.$$

V posledním kroku jsme využili věty o aritmetice limit (9). Nyní abychom již opravdu měli základní limitu, použijeme opět větu o limitě složené funkce (20). Zvolíme funkci $y(x)=x\cdot\ln 3$, čímž získáme výraz

$$\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{y(x)}-1}{y(x)}.$$

Vnější funkce není definována v $\lim_{x\to 0}y(x)=0$, ale $y(x)$ se na $x\in P_\epsilon(0)$ $(\epsilon>0)$ nerovná 0, tedy větu o limitě složené funkce můžeme použít:

$$\ln 3\cdot\lim_{x\to\lim_{x\to 0}y(x)}\frac{e^x-1}{x}=\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln 3\cdot 1=\ln 3.$$

Řešený příklad 8. *Spočtěte limitu*

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x^3+3x^2-3x-9} \tag{49}$$

Postup: Na tomto příkladu si ukážeme kreativnější úpravu zlomku. Dosazením dostaneme neurčitý výraz "$\frac{0}{0}$". Budeme se tedy snažit vytknout z polynomu ve jmenovateli problematický výraz. Jelikož dosazením -3 se rovná polynom nule, $x=3$ je jedním z jeho kořenů. Vytkneme tedy $(x+3)$ a zbytek výrazu dostaneme tak, že polynom tímto výrazem vydělíme:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x^3+3x^2-3x-9}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{(x+3)\left(x^2-3\right)}.$$

Dále bychom chtěli upravit čitatel a zbavit se odmocniny. Vidíme jistou podobu se vzorcem $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, kde $a=\sqrt{x+4}$ a $b=1$. Rozšíříme tedy zlomek výrazem $\sqrt{x+4}+1$, který pro nás není problematický, jelikož $\lim_{x\to -3}\sqrt{x+4}+1=2$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{(x+3)\left(x^2-3\right)}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+3)\left(x^2-3\right)}.$$

Tento tvar je pro nás velice výhodný a nevyšel náhodou - podobně jako ve jmenovateli kořen polynomu musí být -3 jelikož je pro -3 nulový a lze z něj tedy vytknout $(x+3)$, tak v čitateli tohoto tvaru, protože pro -3 vychází nulový, musel být schovaný výraz $(x+3)$. Zbývá nám pokrátit $(x+3)$ a poté dosadit:

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+1\right)\left(x^2-3\right)}=\frac{1}{(1+1)(9-3)}=\frac{1}{12}.$$

Řešený příklad 9. *Spočtěte limitu*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\cos\left(e^x-\sin x\right) \tag{50}$$

Postup: Výraz $\cos\left(e^x-\sin x\right)$ je na úpravu problematický, pokusíme se tedy nejprve upravit zbytek limity. Dosazením do výrazu $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$ dostaneme neurčitý výraz "$\infty-\infty$". Vidíme nápadnou podobnost vzorci $(a-b)\cdot(a+b)=a^2+b^2$, pokusíme se tedy situaci vylepšit tak, že rozšíříme výraz následujícím zlomkem:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot\cos\left(e^x-\sin x\right)=\\ =\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot\cos\left(e^x-\sin x\right)=\\ =\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot\cos\left(e^x-\sin x\right).\end{aligned}$$

Se vzniklým zlomkem se již dá pracovat - po dosazení za x patrně jde k nule. Dále se tedy budeme snažit upravit výraz $\cos\left(e^x-\sin x\right)$. Tento výraz osciluje, je to tedy dobrý kandidát na použití věty o sevřené funkci (18) - pokusíme se výraz nahradit jeho horním a dolním odhadem. Pro funkci cosinus platí, že může být nejvýše 1 a nejméně -1, celou limitu tedy můžeme odhadnout takto:

$$\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot(1)\leqslant\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot\cos\left(e^x-\sin x\right)\leqslant\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot(-1).$$

Poznámka: I když -1 je dolní odhad funkce cosinus, tak při nahrazení cosinu jeho dolním odhadem dostaneme horní odhad celé limity, protože zlomek je záporný.

Nyní vypočteme limity jednotlivých odhadů:

- Limita horního odhadu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot(-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{\infty-1}+\sqrt{\infty+1}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

- Limita dolního odhadu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot(1)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-2}{\sqrt{\infty-1}+\sqrt{\infty+1}}=\frac{-2}{\infty}=0.$$

Limity odhadů se shodují, a proto i původní limita (50) musí být stejná

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\cdot\cos\left(e^x-\sin x\right)=0.$$

23.3. **Derivace funkcí jedné proměnné.**

Řešený příklad 10. *Spočtěte derivaci funkce*

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2} \tag{51}$$

Postup: Výraz (51) je ve tvaru podílu, použijeme na něj tedy větu o aritmetice derivací (28), přesněji její část (iv): $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ a část (i): $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

$$\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x^2-2)-(x+1)(x^2-2)'}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{(x'+1')(x^2-2)-(x+1)\left[(x^2)'-2'\right]}{\left(x^2-2\right)^2}.$$

Nyní stačí využít základní derivace $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ a faktu, že derivace konstanty je nula

$$\frac{(1+0)(x^2-2)-(x+1)(2\cdot x-0)}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{-x^2-2x-2}{\left(x^2-2\right)^2}.$$

Řešený příklad 11. *Spočtěte derivaci funkce*

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+5} \tag{52}$$

Postup: První problém je odmocnina, derivace základních funkcí o ní nic neříkají. Máme však pro $\alpha\in\mathbb{R}$ vzorec $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, převedeme tedy odmocninu na mocninu:

$$=\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{3}}$$

Nyní začneme derivovat. Pod mocninou však nemáme jen x, ale polynom. Musíme proto použít větu o derivaci složené funkce (27) - ta říká, že za určitých podmínek platí $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$. My tedy $\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{3}}$ budeme chápat jako složenou funkci z funkce vnější: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ a funkce vnitřní: $g(x)=x^2+5$. Máme tedy:

$$f'(x)=\left[\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\left[(g(x))^{\frac{1}{3}}\right]'\cdot\left(x^2+5\right)'=\frac{1}{3}\cdot(g(x))^{\frac{-2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\cdot(x^2+5)^{\frac{2}{3}}}.$$

Použili jsme přitom při derivaci výrazu (x^2+5) větu o aritmetice derivací (28).

Řešený příklad 12. *Spočtěte derivaci funkce*

$$f(x)=3^{\frac{x+1}{x+2}} \tag{53}$$

Postup: Jako v minulých příkladech narážíme na situaci, kde nemáme vzoreček pro práci přímo s daným výrazem - zde s reálným číslem s neznámou v mocnině. Máme však vzoreček blízký tomu:

$(e^x)' = e^x$. Převedeme tedy výraz do tvaru e^x. Využijeme toho, že logaritmus je funkce inverzní k funkci exponenciální a že tedy platí $x = e^{\ln x}$:

$$\left(3^{\frac{x+1}{x+2}}\right)' = \left(e^{\ln\left(3^{\frac{x+1}{x+2}}\right)}\right)'.$$

Nyní využijeme větu o derivaci složené funkce (27). Jako vnější funkci budeme brát $f(x) = e^x$ a jako vnitřní $g(x) = \ln\left(3^{\frac{x+1}{x+2}}\right)$:

$$\begin{aligned} e^{\ln\left(3^{\frac{x+1}{x+2}}\right)} \cdot \left[\ln\left(3^{\frac{x+1}{x+2}}\right)\right]' &= 3^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \left(\frac{x+1}{x+2} \cdot \ln 3\right)' \\ &= 3^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \left[\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' \cdot \ln 3 + \frac{x+1}{x+2} \cdot (\ln 3)'\right]. \end{aligned}$$

Použili jsme také vzorec pro práci s logaritmy $\log_b a^k = k \cdot \log_b a$ a větu o aritmetice derivací (28). Zbývá ještě zderivovat zlomek opět pomocí věty o aritmetice derivací a konečně použít derivace základních funkcí:

$$\begin{aligned} 3^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \left[\frac{(x+1)'(x+2) - (x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} \cdot \ln 3 + \frac{x+1}{x+2} \cdot 0\right] &= 3^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} \cdot \ln 3 \\ &= \frac{3^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \ln 3}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Řešený příklad 13. *Spočtěte derivaci funkce*

$$f(x) = \log_x(x^2+1) \tag{54}$$

Postup: Opět narážíme na problém, že výraz neumíme přímo derivovat, zde díky $\log_x$. Přirozený logaritmus však derivovat umíme, využijeme proto následujícího vzorečku pro práci s logaritmy:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Za c tedy zvolíme Eulerovo číslo, abychom měli přirozené logaritmy:

$$\left(\log_x(x^2+1)\right)' = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}\right)'$$

a využijeme větu o aritmetice derivací (28)

$$= \frac{\left[\ln(x^2+1)\right]' \cdot \ln x - \ln(x^2+1) \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x}.$$

Problematický je již jen výraz $\left[\ln(x^2+1)\right]'$. Vyřešíme ho větou o derivaci složené funkce (27). Za vnější funkci zvolíme $f(x) = \ln x$ a za vnitřní $g(x) = x^2+1$. Nakonec jen využijeme derivace základních funkcí:

$$\frac{\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \cdot \ln x - \ln(x^2+1) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln x} - \frac{\ln(x^2+1)}{x \ln^2 x}.$$

23.4. Vyšetřování průběhu funkce.

Řešený příklad 14. *Spočtěte následující limitu pro libovolné* $\alpha \in (0;\infty)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} \tag{55}$$

Postup: Pokud se pokusíme dosadit, vidíme, že jmenovatel i čitatel jde k nule. Láká nás tedy použít l'Hospitalovo pravidlo (35). To říká, že pro reálné funkce f, g definované na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ pro které platí $\lim\limits_{x\to a\pm} g(x) = \lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = 0$, je:

$$\lim_{x\to a\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a\pm} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Podmínky jsou splněné, pravidlo tedy můžeme aplikovat. Využijeme také věty o aritmetice derivací (28), věty o derivaci složené funkce (27) a vzorce $a = e^{\ln a}$ (pro $a \in (0;\infty)$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\ln(\alpha^x)}\right)' - (1)'}{1} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\alpha^x)} \cdot (\ln \alpha^x)'$$
$$= \lim_{x\to 0} \alpha^x \cdot \ln \alpha$$
$$= \ln \alpha.$$

Alternativní Postup: Ukážeme si, že l'Hospitalovo pravidlo lze často nahradit kreativnějším řešením limity. Tvar zadání připomíná základní limitu $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, pokusíme se tedy k jejímu tvaru přiblížit. Dosáhneme toho opět vzorcem $a = e^{\ln a}$ (pro $a \in (0;\infty)$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(\alpha^x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln \alpha} - 1}{x}.$$

Nyní potřebujeme ve jmenovateli stejný tvar jako v exponentu u e abychom se více přiblížili tvaru základní limity. Toho dosáhneme rozšířením zlomku:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln \alpha} - 1}{x} \cdot \frac{\ln \alpha}{\ln \alpha} = \ln(\alpha) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln \alpha} - 1}{x \ln \alpha}.$$

Konečně uplatníme zmíněnou větu o limitě složené funkce (20). Zvolíme vnější funkci $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln \alpha$. Musíme však pro použití této věty splnit alespoň jednu z jejích podmínek:

- $f(x)$ je definována v $\lim_{x\to 0} g(x)$ - neplatí.
- $g(x)$ se nerovná $\lim_{x\to 0} g(x)$ na nějakém prstencovém okolí nuly - platí, můžeme tedy větu použít.

Kvůli použití věty musíme ještě upravit limitu, bude platit $x \to \lim_{x\to 0} g(x)$, což je však stále 0. Máme

$$\ln(\alpha) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln(\alpha) \cdot 1$$
$$= \ln \alpha.$$

Literatura

[1] Jiří Demel. *Grafy a jejich aplikace.* Academia, 2002.
[2] Martin Mareš and Tomáš Valla. *Průvodce labyrintem algoritmů.* CZ. NIC, zspo, 2017.
[3] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, 2002.