Požadavky ke zkoušce z AN3

16. prosince 2021

- **Integrály.** Co je míra a jaké má vlastnosti. Jordanova míra, jordanovská měřitelnost, množina racionálních čísel na omezeném intervalu není jordanovsky měřitelná (zatímco σ-aditivní míru má tato množina rovnu nule). Definice dvojného integrálu (v Riemannově smyslu), Fubiniova věta, dvojnásobný integrál. Příklad dvojnásobného integrálu, u kterého záměna pořadí integrace změní hodnotu (nejsou tedy splněny předpoklady Fubiniovy věty).

- **Substituce v integrálu.** Jakobián, substituce ve dvojném integrálu obecně i speciálně pro polární souřadnice. Výpočet objemu Vivianiho tělesa. Použití polárních souřadnic k výpočtu integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

- **Limity funkcí více proměnných.** Jak sopuvisí limity po přímkách s dvojnou limitou. Příklad funkce, která má stejné limity po všech přímkách, ale nemá dvojnou limitu.

- **Derivace funkcí více proměnných.** Parciální funkce a parciální derivace. Derivace podle vektoru, její geometrický význam (jak souvisí s přírůstky). Derivace podle vektorů $(1, 0)$, $(0, 1)$ (jsou rovny parciálním derivacím). Proč je derivace podle násobku vektoru násobkem derivace podle vektoru. Jak souvisí druhá vlastnost linearity – tedy derivace podle součtu vektorů je rovna součtu derivací podle jednotlivých vektorů – s tečnou rovinou a jak je tuto vlastnost možné vysvětlit na papírovém modelu. Slabá (Gâteauxova) derivace, silná (Fréchetova) derivace, gradient, vyjádření slabé a silné derivace pomocí gradientu. Souvislost silné derivace s rovnicí tečné roviny. Derivace funkce a výpočet chyby (příklad 2.22 z textu prof. Zajíčka). Věta o existenci silné derivace i s důkazem. Věta o spojitosti a silné derivaci i s důkazem; příklad nespojité funkce mající slabou derivaci. Věta o silné derivaci složeného zobrazení. Věta o rovnosti smíšených derivací, příklad nerovnosti smíšených derivací.

- **Extrémy funkcí více proměnných.** Lokální extrémy, globální extrémy, vázané extrémy. Stacionární body, typy stacionárních bodů, Taylorův polynom druhého stupně, kvadratické formy a jak souvisí s typy stacionárních bodů. Metoda Lagrangeových multiplikátorů (jen pro případ jednoho multiplikátoru), geometrický význam (jak najdete na mapě s vrstevnicmi nejvyšší místo na cestě, které vektory mají něco společného a co). Použití substituce a věty o derivaci složené funkce na hledání stacionárních bodů – vysvětlení na konkrétním příkladě.

- **Metrické prostory.** Co je metrický prostor, příklady metrických prostorů odvozených od norem (na vektorových prostorech), důkaz, že takto odvozená metrika splňuje axiomy metrického prostoru. Jak vypadají kružnice v těchto metrických prostorech. Okolí bodu, vnitřní, vnější, hraniční, hromadné a izolované body množiny. Vnitřek, hranice a uzávěr množiny. Otevřené, uzavřené množiny. Omezená množina, věta o existenci extrémů spojité funkce více proměnných na uzavřené omezené množině (vícerozměrná varianta Weierstrassovy věty), její použití při hledání extrémů. Definice úplného metrického prostoru, příklad úplného metrického prostoru (reálná čísla) a neúplného metrického prostoru (racionální čísla).

- **Funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.** Limity a derivace počítáme po složkách. Geometrický význam funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$ a geometrický význam derivace (parametricky zadaná křivka a její tečný vektor).
  Funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, geometrický význam řádků a sloupců Jacobiovy matice, Jacobiánu, web thetruesize.com, obraz obdélníku a výpočet jeho obsahu.

- **Posloupnosti a řady funkcí.** Bodová konvergence posloupnosti funkcí, příklad posloupnosti spojitých funkcí s nespojitou limitou. Souvislost nespojitosti limity spojitých funkcí s prohozením pořadí limit ve dvojné limitě. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí, definice a vysvětlení na grafu. Věta o spojitosti limity stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí a hlavní myšlenka důkazu.

- **Mocninné řady.** Věta o poloměru konvergence mocninné řady i s důkazem, odvození vzorce pro poloměr konvergence z limitního podílového kritéria. Věta o spojitosti součtu mocninné řady na kruhu konvergence (ve vnitřních bodech).

- **Taylorovy řady.** Taylorovy řady funkcí sin, cos, log, exp, obecné mocniny, zobecněná binomická věta. Pro funkce sin, cos, exp důkaz rovnosti funkce a součtu Taylorovy řady. Příklad funkce, která se nerovná součtu své Taylorovy řady. Taylorova řada součtu je součet Taylorových řad. Poloměr konvergence součtu Taylorových řad.

- **Derivování mocninné řady člen po členu.** Derivování řady člen po členu; jak souvisí s výměnou pořadí limit ve dvojné limitě a proč nelze použít pravidlo o derivaci součtu. Věta o poloměru konvergence mocninné řady zderivované člen po členu (důkaz pro případ vzorce pro poloměr konvergence). Důsledek: Taylorova řada součtu mocninné řady je rovna této mocninné řadě (i s důkazem důsledku).