Příklady do písemné zkoušky z AN3

14. prosince 2021

1. Načrtněte množinu M a určete řezy M rovnoběžné se souřadnými osami.
$$M = \{[x,y] : y \leq x(2-x), x \leq y+2\}$$

2. Vypočtěte dvojný integrál z funkce f přes trojúhelník ABC
$$f(x,y) = 2x \qquad A = [-1,0], B = [2,0], C = [0,4]$$

3. Načrtněte množinu M a vypočtěte dvojný integrál funkce f přes tuto množinu.
$$f(x,y) = x \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0, y \leq \frac{2-x}{1+x}\}$$

4. Načrtněte množinu M a vypočtěte souřadnice jejího těžiště.
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

5. Načrtněte množinu M a vypočtěte dvojný integrál funkce f přes tuto množinu.
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad f(x,y) = x^2+y^2$$

6. Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [1,2]$. Vypočtěte $\operatorname{grad} f(B)$, $\operatorname{grad} g(B)$ a umístěte je do bodu B.
$$f(x,y) = xy - x + y \qquad g(x,y) = x^2 + y$$

7. Vypočtěte limity funkce f v bodě $\mathbf{a} = (0,0)$ po všech přímkách. Co lze z výsledků usoudit o existenci limity funkce f v bodě $\mathbf{a}$?
$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$$

8. Určete definiční obor následujících funkcí a zjistěte, zda je možné je spojitě rozšířit.
$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$$
$$g : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

9. Určete definiční obor následující funkce a zjistěte, zda je možné ji spojitě rozšířit.

$$f : (x, y) \mapsto \left(\frac{x^2 y}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

10. Vypočtěte derivaci podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ funkce f v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$. Určete, zda má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ slabou derivaci.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

11. Vypočtěte derivaci podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ funkce f v bodě $\mathbf{a} = (1, 0)$. Určete, zda má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ slabou derivaci.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

12. Vypočtěte silnou derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a} = (-2, 1)$.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

13. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a} = (-2, 1)$.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

14. Vypočtěte obě smíšené derivace druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a} = (2, 1)$

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2y^2}{x + y}$$

15. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ.

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2xy + 2y^3$$

16. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ.

$$f(x, y) = x^3 + xy - y^2 - 2x + 3y$$

17. Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na trojúhelníku o vrcholech v bodech A, B, C? Pod trojúhelníkem máme na mysli obrazec – tedy nejen body na jeho obvodu, ale i uvnitř.

$$A = [0, 0], B = [3, 0], C = [0, 3], \quad f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 5x - 9y$$

18. Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na elipse o vrcholech v bodech A, B, C, D? Pod elipsou máme na mysli obrazec – tedy nejen křivku, ale i body uvnitř.
Zakreslete elipsu i body, v nichž funkce nabývá extrému a jejich polohu zkontrolujte úvahou.

$$A = [-1, 0], B = [0, -2], C = [1, 0], D = [0, 2] \qquad f(x, y) = x - y$$

19. Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na elipse o vrcholech v bodech A, B, C, D? Pod elipsou máme na mysli obrazec – tedy nejen křivku, ale i body uvnitř.
Zakreslete elipsu i body, v nichž funkce nabývá extrému a jejich polohu zkontrolujte úvahou.

$$A = [-1, 0], B = [0, -2], C = [1, 0], D = [0, 2] \qquad f(x, y) = xy$$

20. Mezi obdélníky vepsanými do elipsy a se stranami rovnoběžnými s osami elipsy nalezněte ten, který má největší obsah. Elipsa je zadaná svými vrcholy

$$A = [2, 0], B = [0, 3], C = [-2, 0], D = [0, -3]$$

21. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada a pro která konverguje absolutně.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^k (k+1)} (x+1)^k$$

22. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada a pro která konverguje absolutně.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

23. Určete součet a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k} x^k$$

24. Určete Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete poloměr konvergence této řady.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x - 6}$$