$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^2$, $f(A) \in \mathbb{R}$

$\operatorname{grad} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\operatorname{grad} f(A) \in \mathbb{R}^2$

$D_v f(A)$ je derivace funkce f v bodě A podle vektoru v

(*) značí vztah $D_v f(A) = v \cdot \operatorname{grad} f(A)$

„dobrá" aproximace $f(A+v) - f(A)$ výrazem $v \cdot \operatorname{grad} f(A)$ znamená:

$$\lim_{v \to o} \frac{f(A+v) - f(A) - v \cdot \operatorname{grad} f(A)}{\|v\|} = 0$$

$\longrightarrow$ značí implikaci

Existuje $\operatorname{grad} f(A)$ $\longleftarrow$ $\operatorname{grad} f$ je funkce spojitá v bodě A

f může a nemusí[1] být spojitá v bodě A

pro $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{o\}$ může a nemusí[2] existovat $D_v f(A)$

může a nemusí[3] platit (*)

$v \cdot \operatorname{grad} f(A)$ může a nemusí[4] „dobře" aproximovat $f(A+v) - f(A)$

f je spojitá v bodě A

Důkaz (používá Lagrangeovu větu)

$v \cdot \operatorname{grad} f(A)$ „dobře" aproximuje $f(A+v) - f(A)$

Kandidáti na funkce s vlastnostmi 1, 2, 3, 4:

$$\begin{cases} 1 & \text{pro } y = x^2,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^4 y^2}{x^8+y^4} & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{jinak} \end{cases}$$