FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

$x_0 \in \mathbb{R}$, $f: U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ funkce

Taylorův polynom

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Zbytek (residuum) Taylorova polynomu

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x)$$

Pro R_1 platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = \qquad \left(\text{zde } R_2(x) = f(x) - T_2(x)\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

$$\overset{\text{,,}\frac{0}{0}\text{''}\ \text{L'H:}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x-x_0} - f''(x_0) = 0$$

Podobně pro $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

a $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Příklad:

$$f(x) = 2 - x^4 + x^6$$

$$n = 4, \quad x_0 = 0$$

$$T_4(x) = 2 - x^4$$

$$f(x) = 2 - x^4 \underbrace{(1 - x^2)}_{\text{pro } x \text{ malé je blízké } 1}$$

T_4 má lokální (i globální) maximum v bodě nula

f má lokální maximum v bodě nula

Obecně platí:

Má-li T_n v bodě x_0 ostrý lokální extrém, pak má i f v bodě x_0 ostrý lokální extrém
$\left(f(x) \lessgtr f(x_0)\right)$

(odtud kuchařka: počítáme $f''(x_0), f'''(x_0)$ .. dokud není nenulová

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Má-li $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $a = (x_0, y_0)$ spojité parciální derivace druhého řádu, pak platí

1. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2} = 0$$

Poznámka:
Na rozdíl od funkce jedné proměnné nestačí existence derivací. Jejich spojitost je postačující podmínkou. (~~tj. nejsou~~ nejsou-li spojité v bodě a, tvrzení může a nemusí platit)

Na rozdíl od funkce jedné proměnné nemusí tvrzení platit pro $n > 2$.

Příklad:

$$f(x,y) = (y - x^2)^2 + y^4 - 2(x^2 + y^2)^4$$

$$T_4(x,y) = (y - x^2)^2 + y^4 \quad (a = (0,0))$$

T_4 nabývá v bodě a ostrého lokálního minima, ale

$$f(x, x^2) = x^8 - 2(x^2 + x^4)^4 =$$

$$= x^8 \Big(\underbrace{1 - 2(1 + x^2)}_{\doteq -1 \text{ pro } x \text{ malé}} \Big)$$

Tedy f nemá v bodě $a = (0,0)$ ostré lokální minimum.

Pro $n=2$ platí:

Má-li f v bodě $a=(x_0, y_0)$ spojité parciální derivace druhého řádu a T_2 v bodě a nabývá v bodě a ostrého lokálního extrému (tedy minima či maxima), pak i f nabývá v bodě a ostrého lokálního extrému.