Úlohy na extrémy

1a Nalezněte stacionární body funkce f

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 13x + 4y$$

1b

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + 32xy$$

1c

$$f(x,y) = x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$$

1d

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)(2x + 2y + 1)$$

2a–d V každém stacionárním bodě v úlohách 1a–d vypočtěte Hessovu matici (smíšené derivace počítejte v obojím pořadí) a určete, zda je tato matice pozitivně definitní, případně zda je negativně definitní (pojmy si připomeňte pohledem do zápisků z algebry).

3a–d V každém stacionárním bodě v úlohách 1a–d napište Taylorův polynom funkce f druhého stupně.

4. Vypočtěte druhou smíšenou derivaci funkce f v obojím pořadí, tedy vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ a zjistěte, zda se rovnají.

$$f(x,y) = \frac{x^2y - y^3}{3x + y}$$

5a Načrtněte množinu M a nalezněte maximum a minimum funkce f na této množině. Body, ve kterých jsou extrémy nabývány, veďte vrstevnici funkce.

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad f(x,y) = 2x + 3y$$

$$f(x,y) = 2x + 3y$$

5b M je trojúhelník ABC, máme na mysli obrazec, tedy včetně vnitřních bodů

$$A = [-1,0], B = [2,0], C = [0,2] \qquad f(x,y) = xy$$

5c

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x \leq 5 - y^2\} \qquad f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 + 2y$$

6. V úlohách 5a–c vypočtěte a zakreslete do obrázku gradient funkce f v bodech, ve kterých nabývá funkce extrému.

7* Dokážete některou z úloh 5a–c interpretovat geometricky?