Písemná část zkoušky z AN3

19. ledna 2023

1. Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [1, 2]$. Vypočtěte $\operatorname{grad} f(B)$, $\operatorname{grad} g(B)$ a umístěte je do bodu B.

$$f(x, y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y \qquad g(x, y) = 2x + y$$

1* Vypočtěte determinant matice, jejíž řádky jsou $\operatorname{grad} f(B)$, $\operatorname{grad} g(B)$. Jaký má tento determinant geometrický význam?

2. Vypočtěte limity funkce f v bodě $A = [0, 0]$ po všech přímkách. Co lze z výsledků usoudit o existenci limity funkce f v bodě A?

$$f(x, y) = \frac{x^2y + xy^4}{x^2 + y^4}$$

2* Určete, zda má funkce f v bodě A limitu a svůj závěr zdůvodněte.

3. Mezi obdélníky vepsanými do elipsy a se stranami rovnoběžnými s osami elipsy nalezněte ten, který má největší obvod. Elipsa je zadaná svými vrcholy

$$A = [2, 0], B = [0, 1], C = [-2, 0], D = [0, -1]$$

3* Úkolem je vyrobit plechové konzervy ve tvaru válce s objemem $V > 0$ tak, aby byly co nejlehčí. Najděte příslušný poměr výšky h a poloměru r jeho podstavy, a to nejdříve pro obecný objem V, pak pro $V = 1000cm^3$.

4. Vypočtěte dvojný integrál z funkce f přes trojúhelník ABC

$$f(x, y) = y - 2x \qquad A = [-1, 0], B = [2, 0], C = [0, 1]$$

4* Integrál vypočtěte prostředky elementární geometrie.

Návod: Podívejte se na vzorec pro těžiště a přemýšlejte, co z tohoto vzorce plyne.

5. Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

5* Vypočtěte součet této řady.