Požadavky ke zkoušce z AN3

20. prosince 2022

- **Parciální derivace funkcí více proměnných.** Parciální funkce a parciální derivace. Derivace podle vektoru, její geometrický význam (jak souvisí s přírůstky). Derivace podle vektorů $(1, 0)$, $(0, 1)$ (jsou rovny parciálním derivacím). Proč je derivace podle násobku vektoru násobkem derivace podle vektoru. Jak souvisí druhá vlastnost linearity – tedy derivace podle součtu vektorů je rovna součtu derivací podle jednotlivých vektorů – s tečnou rovinou a jak je tuto vlastnost možné vysvětlit na papírovém modelu.
  Derivace podle vektoru se někdy nazývá derivací ve směru, v čem je tento název zmatečný.

- **Limity funkcí více proměnných.** Definice limity funkce dvou proměnných, jak souvisí s limitami po přímkách. Příklad funkce, která má stejné limity po všech přímkách, ale nemá dvojnou limitu.

- **Derivace funkcí více proměnných.** Definice derivace (bývá nazývána též totální diferenciál), gradient, vyjádření derivace pomocí gradientu, souvislost s rovnicí tečné roviny, vyjádření derivace podle vektoru pomocí gradientu. Derivace funkce a výpočet chyby (příklad 2.22 z textu prof. Zajíčka). Věta o existenci derivace (za předpokladu spojitosti parciálních derivací) i s důkazem (zopakování Lagrangeovy věty). Věta o spojitosti a derivaci i s důkazem.
  Derivace vyších řádů: věta o rovnosti smíšených derivací, příklad funkce, jejíž smíšené derivace se nerovnají.

- **Funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.** Limity a derivace počítáme po složkách. Geometrický význam funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$ a geometrický význam derivace (parametricky zadaná křivka a její tečný vektor).
  Funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, Jakobiova matice, geometrický význam jejích řádků a sloupců, Jacobián a jeho geometrický význam, web thetruesize.com.

- **Extrémy funkcí více proměnných.** Definice lokálního extrému, globálního extrému, vázaného extrému. Stacionární body, typy stacionárních bodů, Taylorův polynom druhého stupně, kvadratické formy a jak souvisí s typy stacionárních bodů. Metoda Lagrangeových multiplikátorů (jen pro případ jednoho multiplikátoru), geometrický význam (jak najdete na mapě s vrstevnicmi nejvyšší místo na cestě, které vektory mají něco společného a co).

- **Integrály.** Definice dvojného integrálu (v Riemannově smyslu), Fubiniova věta, dvojnásobný integrál. Příklad dvojnásobného integrálu, u kterého záměna pořadí integrace změní hodnotu (nejsou tedy splněny předpoklady Fubiniovy věty).

- **Substituce v integrálu.** Jakobián, substituce ve dvojném integrálu obecně a speciálně pro polární souřadnice. Výpočet objemu Vivianiho tělesa. Použití polárních souřadnic k výpočtu integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

- **Posloupnosti a řady funkcí.** Bodová konvergence posloupnosti funkcí, příklad posloupnosti spojitých funkcí s nespojitou bodovou limitou, souvislost s prohozením pořadí limit. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí, definice a vysvětlení na grafu. Věta o spojitosti limity stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí a hlavní myšlenka důkazu.

- **Mocninné řady.** Mocninná řada, její střed, koeficienty, členy. Věta o poloměru konvergence mocninné řady i s důkazem, odvození vzorce pro poloměr konvergence z limitního podílového kritéria.

- **Taylorovy řady.** Taylorovy řady funkcí sin, cos, log, exp. Příklad funkce, která se nerovná součtu své Taylorovy řady. Pro funkce sin, cos, exp se funkce součtu své Taylorovy řady rovnají (bez důkazu, nestihli jsme, je založený na Lagrangeově tvaru zbytku, zopakujte si alespoň pro e^1 z minulého semestru).

- **Derivování mocninné řady člen po členu.** Derivování řady člen po členu, souvislost s výměnou pořadí limit, proč nelze použít pravidlo o derivaci součtu. Věta o derivaci mocninné řady člen po členu a důsledek na výpočet Taylorových řad vybraných funkcí.

- **Metrické prostory.** Co je metrický prostor, příklady metrických prostorů odvozených od norem (na vektorových prostorech), důkaz, že takto odvozená metrika splňuje axiomy metrického prostoru, diskrétní metrický prostor. Okolí bodu, vnitřní, vnější, hraniční, hromadné a izolované body množiny. Vnitřek, hranice a uzávěr množiny. Otevřené, uzavřené množiny. Omezená množina, věta o existenci extrémů spojité funkce více proměnných na uzavřené omezené množině (vícerozměrná varianta Weierstrassovy věty), její použití při hledání extrémů. Definice úplného metrického prostoru, příklad úplného metrického prostoru (reálná čísla) a neúplného metrického prostoru (racionální čísla).