Příklady do písemné zkoušky z AN3

21. prosince 2022

1a Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [1, 2]$. Vypočtěte grad $f(B)$, grad $g(B)$ a umístěte je do bodu B.

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 5y \qquad g(x, y) = 2 - x + y^2$$

1b

$$f(x, y) = x - 2y + 3xy \qquad g(x, y) = x^2 + 2y^2$$

2a Vypočtěte limity funkce f v bodě $A = [0, 0]$ po všech přímkách. Co lze z výsledků usoudit o existenci limity funkce f v bodě A?

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2 - 3x^2y}{x^2 + y^6}$$

2b

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2y + xy^3}{x^2 + y^4}$$

3a Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda je možné ji spojitě rozšířit.

$$f(x, y) = \frac{x^2y - x^2}{x^2 + (y - 1)^2}$$

3b

$$f(x, y) = \frac{xy^2 - y^3}{(x + 2)^2 + y^2}$$

4a Vypočtěte derivaci podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ funkce f v bodě $A = [0, 0]$.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4b Funkce stejná, bod $A = [1, 0]$.

4c

$$f(x, y) = \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}, \quad A = [1, -2]$$

5. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A = [1, -2]$.

$$f(x, y) = \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

6. Vypočtěte obě smíšené derivace druhého řádu funkce f v bodě $A = [2, 1]$
$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x + y}$$

7a Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ.

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2xy + 2y^3$$

7b

$$f(x, y) = x^3 + xy - y^2 - 2x + 3y$$

8a Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na trojúhelníku o vrcholech v bodech A, B, C?
Pod trojúhelníkem máme na mysli obrazec – tedy nejen body na jeho obvodu, ale i uvnitř.

$$A = [0, 0], B = [3, 0], C = [0, 3], \quad f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 5x - 9y$$

8b Na elipse o vrcholech v bodech A, B, C, D, pod elipsou máme na mysli obrazec – tedy nejen křivku, ale i body uvnitř.
Zakreslete elipsu i body, v nichž funkce nabývá extrému a jejich polohu zkontrolujte úvahou.

$$A = [-1, 0], B = [0, -2], C = [1, 0], D = [0, 2] \qquad f(x, y) = xy$$

8c Opět elipsa.

$$A = [-3, 0], B = [0, -2], C = [3, 0], D = [0, 2] \qquad f(x, y) = x - y$$

9. Mezi obdélníky vepsanými do elipsy a se stranami rovnoběžnými s osami elipsy nalezněte ten, který má největší obsah. Elipsa je zadaná svými vrcholy
$$A = [2, 0], B = [0, 3], C = [-2, 0], D = [0, -3]$$

10. Načrtněte množinu M a určete řezy M rovnoběžné se souřadnými osami.
$$M = \{[x, y] : y \leq x(2 - x), x \leq y + 2\}$$

11. Vypočtěte dvojný integrál z funkce f přes trojúhelník ABC

$$f(x, y) = 2x \qquad A = [-1, 0], B = [2, 0], C = [0, 4]$$

12a Načrtněte množinu M a vypočtěte dvojný integrál funkce f přes tuto množinu.

$$f(x,y) = x \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0, y \leq \frac{2-x}{1+x}\}$$

12b

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

13a Načrtněte množinu M a vypočtěte souřadnice jejího těžiště.

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

13b

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x+1)(y+1) \leq 4\}$$

14a Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada a pro která konverguje absolutně.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^k (k+1)} (x+1)^k$$

14b

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$$

15a Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k} (x+1)^k$$

15b

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} (x-2)^k$$

16a Určete Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě $x_0 = 0$, vypočtěte alespoň čtyři nenulové koeficienty.

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^2+x-2}$$

16b

$$f(x) = \frac{-x-4}{x^2-x-2}$$