Metrické prostory

14. prosince 2022

Definice.

Dvojici (X, dist), kde X je množina a dist je zobrazení dvojic z X (tedy z $X \times X$) do $\mathbb{R}$ splňující 1 – 4 nazveme *metrickým prostorem.*
1. $(\forall x, y \in X)(\mathrm{dist}(x, y) \geq 0)$
2. $(\forall x, y \in X)(\mathrm{dist}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
První dvě vlastnosti nazýváme pozitivitou.
3. $(\forall x, y \in X)(\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$
Třetí vlastnost nazýváme symetrií.
4. $(\forall x, y, z \in X)(\mathrm{dist}(x, z) \leq \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z)$
Čtvrtou vlastnost nazýváme trojúhelníkovou nerovností.

Normované vektorové prostory jako metrické prostory

Je-li $(V, \|\cdot\|)$ normovaný vektorový prostor, pak $\mathrm{dist}(x, y) = \|x - y\|$ splňuje 1 – 4 a tedy $(V, \|\cdot - \cdot\|)$ je metrickým prostorem.

Důkaz provedeme jako cvičení na tabuli.

Diskrétní metrický prostor

Na množině X (libovolné) definujeme $\mathrm{dist}(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ pro $x = y$. Pak (X, dist) je metrickým prostorem – nazýváme ho disktrétním metrickým prostorem.

Důkaz provedeme jako cvičení na tabuli.

Posloupnosti v metrickém prostoru

Posloupnost $\{x_n\}$ prvků metrického prostoru (X, dist) nazveme *konvergentní* a $x \in X$ její limitou, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(\mathrm{dist}(x_n, x) < \varepsilon)$$

Posloupnost $\{x_n\}$ prvků metrického prostoru (X, dist) nazveme *Cauchyovskou*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq k)(\mathrm{dist}(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

Platí: je-li posloupnost konvergentní, je i Cauchyovská.
Hlavní myšlenka důkazu: z trojúhelníkové nerovnosti a ze symetrie plyne

$$\mathrm{dist}(x_n, x_m) \leq \mathrm{dist}(x_n, x) + \mathrm{dist}(x_m, x)$$

Je-li posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní, je pravá strana nerovnosti „malá“, tedy i levá strana je „malá“, a proto je posloupnost Cauchyovská.

Opačná implikace nemusí platit – Cauchyovská posloupnost nemusí být konvergentní. Uvažujme množinu racionálních čísel s metrikou $\mathrm{dist}(x, y) = |x - y|$ a posloupnost $x_n = (1 + 1/n)^n$. Tato posloupnost má v $\mathbb{R}$ limitu rovnu Eulerovu číslu e, je tedy konvergentní, odkud plyne, že je i Cauchyovská. Vzdálenost je na obou množinách $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ definovaná stejně, proto je posloupnost Cauchyovská i v metrickém prostoru $(\mathbb{Q}, |\cdot - \cdot|)$. V tomto metrickém prostoru ale není konvergentní, protože Eulerovo číslo není racionální.

Metrický prostor nazveme *úplným metrickým prostorem*, pokud je v něm každá Cauchyovská posloupnost konvergentní.

Víme, že $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ je úplným metrickým prostorem. Příklad nahoře ukazuje, že metrický prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot - \cdot|)$ není úplným metrickým prostorem.

Spojitost funkcí v metrických prostorech

Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ z metrického prostoru (X, dist_1) do metrického prostoru (Y, dist_2) je spojitá v bodě $a \in X$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\mathrm{dist}_1(x, a) < \delta \Rightarrow \mathrm{dist}_2(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

Poznámka: v diskrétním metrickém prostoru nemají pojmy limity posloupnosti a spojitosti funkce valného smyslu. Jediné konvergentní posloupnosti v diskrétním metrickém prostoru jsou ty, které jsou od jistého indexu konstantní. Spojité jsou buď všechny funkce (je-li prostor vzorů diskrétní), nebo jen ty, které jsou lokálně konstantní (je-li prostor obrazů diskrétní).

Vztah bodu a množiny.

Vysvětlíme, které body jsou vnitřní body množiny, které jsou hraniční a které jsou vnější. Dále řekneme, které body jsou hromadné a které izolované. Tyto pojmy lze vztáhnout k množině nebo k celému prostotu.
Dále řekneme, které množiny jsou otevřené, které jsou uzavřené, které jsou kompaktní. Řekneme vztah k operacím sjednocení a průniku, vysvětlíme na příkladech.
Zopakujeme verzi Weierstrassovy věty o existenci extrému spojité funkce pro metrické prostory.

Napíšeme definice na tabuli, nakreslíme obrázky.