Taylorův polynom funkce jedné i více proměnných

23. listopadu 2022

Jedna proměnná, stupeň jedna

Taylorův polynom v bodě $a \in \mathbb{R}$

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Zbytek (reziduum, chyba aproximace) Taylorova polynomu

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

Pro zbytek R_1 platí

$$\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

Tedy

$$\lim_{x\to a} R_1(x)/(x - a) = 0 \tag{1}$$

Dvě proměnné, stupeň jedna

V dalším jsou $a \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ body v $\mathbb{R}^2$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Gradient funkce f v bodě a je

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

Pro $v = (v_x, v_y)$ je

$$v \cdot \operatorname{grad} f(a) = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Taylorův polynom v bodě a je

$$T_1(x) = f(a) + (x - a) \cdot \operatorname{grad} f(a)$$

nebo jinak zapsáno

$$T_1(a + v) = f(a) + v \cdot \operatorname{grad} f(a)$$

Zbytek Taylorova polynomu

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \operatorname{grad} f(a)$$

Existence gradientu nezaručuje vlastnost zbytku (1), což nás vede k definici:

Říkáme, že funkce f má v bodě a derivaci, pokud pro zbytek Taylorova polynomu prvního stupně platí ($\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ je euklidovská norma vektoru v).

$$\lim_{v \to (0,0)} \frac{R_1(v)}{\|v\|} = 0$$

Na přednášce jsme dokazovali větu:

Je-li gradient funkce f spojitou funkcí v bodě a, pak má funkce f v bodě a derivaci.

Jedna proměnná, stupeň dva

Taylorův polynom v bodě $a \in \mathbb{R}$

$$T_2(x) = T_1(x) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Zbytek Taylorova polynomu

$$R_2(x) = f(x) - T_2(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pro zbytek R_2 platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^2}$$

Limita je typu nula lomeno nulou? použijeme L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) 2(x-a)}{2(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)} =$$
$$\frac{1}{2} \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} - f''(a) = f''(a) - f''(a) = 0$$

Odtud plyne

$$\lim_{x \to a} R_2(x)/(x-a)^2 = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= T_2(x) + R_2(x) = T_1(x) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + R_2(x) \\ & T_1(x) + (x-a)^2 \left[\tfrac{1}{2} f''(a) + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} \right] \end{aligned}$$

Při hledání lokálních extrémů funkce f najdeme $a \in \mathbb{R}$ vyhovující $f'(a) = 0$. Pro tato a je $T_1(x) = f(a) + 0$ a

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x) = f(a) + (x-a)^2 \left[\tfrac{1}{2} f''(a) + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} \right]$$

Odtud lze ze znaménka $f''(a)$ určit typ lokálního extrému.
Je-li $f''(a) > 0$, pak vzhledem k (2) je výraz v hranaté závorce v dostatečně malém okolí $U(a)$ bodu a kladný a odtud plyne

$$(\forall x \in U(x))(f(x) > f(a))$$

Funkce má tedy v bodě a lokální minimum.
Podobně odvodíme, že z $f''(a) < 0$ plyne, že má funkce f v bodě a lokální maximum.
V případě $f''(a) = 0$ je možné k určení typu extrému použít Taylorův polynom vyššího stupně.

Jedna proměnná, stupeň n

Taylorův polynom v bodě $a \in \mathbb{R}$ stupně n

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(a)(x-a)^k$$

Zde $f^{(k)}(a)$ značí hodnotu k-té derivace v bodě a, pro $k = 0$ značí $f^{(0)}(a)$ funkční hodnotu $f(a)$. Zbytek Taylorova polynomu je

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

a platí pro něj

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

V případě, že derivace v bodě a jsou až do řádu $n-1$ rovny nule, tj. $f^{(k)}(a) = 0$ pro $k = 1, \cdots, n-1$, je

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a

$$f(x) = f(a) + (x-a)^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \right]$$

V případě $f^{(n)}(a) \neq 0$ lze zvolit okolí $U(a)$ bodu a, že výraz v hranaté závorce má stejné znaménko jako $f^{(n)}(a)$. Odtud pak plyne existence/typ lokálního extrému funkce f v bodě a na paritě (lichosti či sudosti) n a znaménku $f^{(n)}(a)$.