M množina

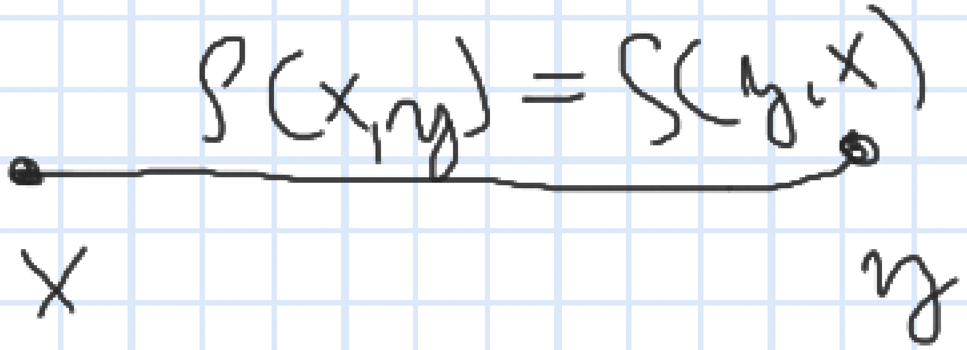
$\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$

(M, ρ)

$$\boxed{\begin{gathered} 1)\ (\forall x, y \in M)(\rho(x,y) \geq 0) \\ \rho(x,y) = 0 \iff x = y \end{gathered}}$$

$x = y$

$$\boxed{2)\ (\forall x, y \in M)\big(\rho(x,y) = \rho(y,x)\big)}$$



$$\boxed{3)\ (\forall x, y, z \in M)\big(\underline{\rho(x,z)} \le \underline{\rho(x,y)} + \underline{\rho(y,z)}\big)}$$

METRICKÝ PROSTOR ODVOZENÝ OD NORMY

- $(V, \|\cdot\|)$, $u, v \in V$
- $\rho(u,v) = \|u - v\|$
- (V, ρ) je MP

1) <u>POZITIVITA</u>

$\|x\| \geq 0 \implies \|u - v\| \geq 0$

$u = v$, pak $\rho(u,v) = 0$

$\rho(u,u) = \|u - u\| = 0$

$\rho(u,v) = 0$

$\|x\| = 0 \iff x = \vec{o}$

$\rho(u,v) = \|u - v\| \implies u = v$

2) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$

$\rho(u,v) = \|u-v\| = \|(-1)(v-u)\| = |-1| \cdot \|v-u\| = 1 \cdot \rho(v,u)$

3) $u,v,w \in V$

$\rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$

$\rho(u,w) = \|u-w\| = \|(u-v)+(v-w)\| \leq \|u-v\| + \|v-w\|$

$= \rho(u,v) + \rho(v,w)$

DISKRÉTNÍ METRIKA

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & \text{pokud } x\neq y\\ 0 & \text{pokud } x=y\end{cases}$$

1) pozitivita

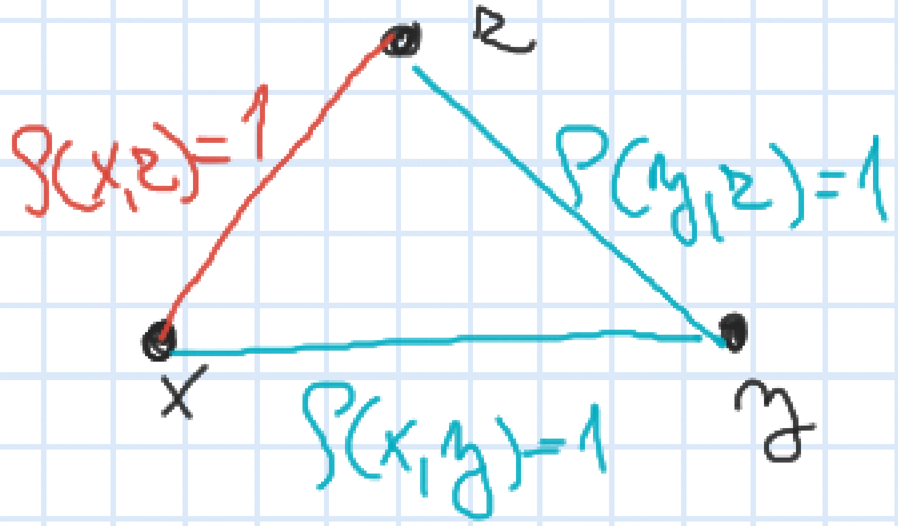
2) symetrie

3) △ nerovnost

x, y, z

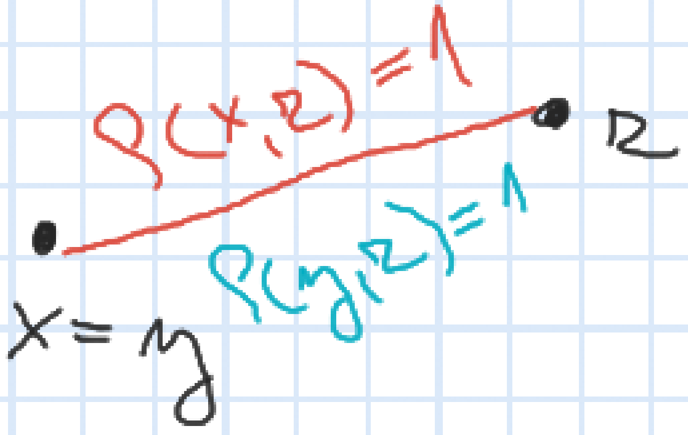
① $x \neq y \neq z$

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$



$$1 \leq 1 + 1$$

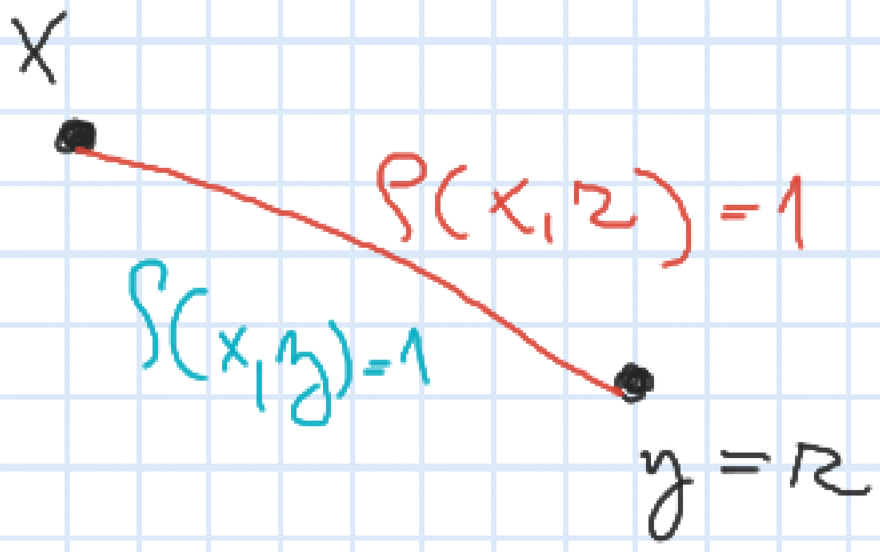
② $x = y \neq z$



$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

$$1 \leq 0 + 1$$

③ $x \neq y, \quad y = z$



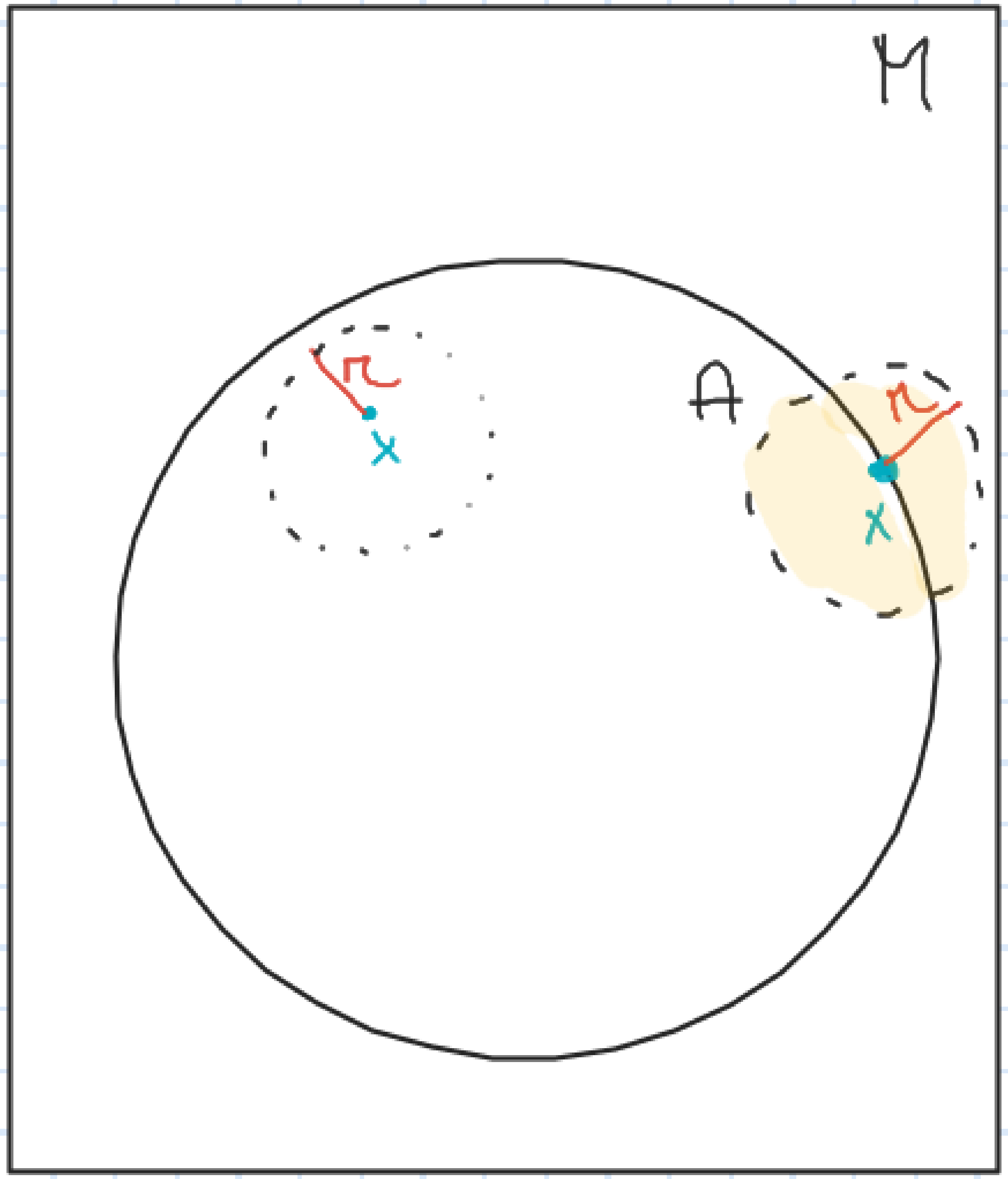
$$1 \leq 1 + 0$$

④ $x = y = r$

⑤ $x = r \neq y$

VZTAH BODŮ A MNOŽIN

- MP (M, ρ), $A \subseteq M$



- x je vnitřní bod množiny A, pokud

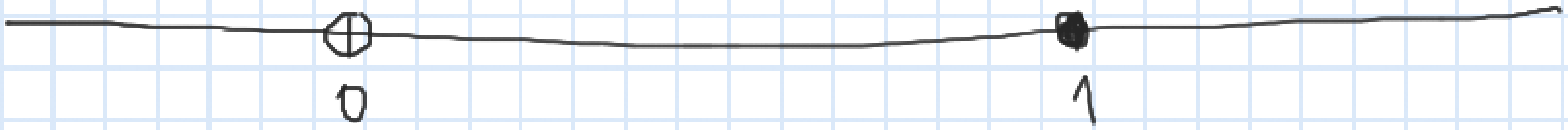
$(\exists r > 0)(B(x,r) \subset A)$

- x je hraniční bod množiny A, pokud

$(\forall r > 0)(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \;\wedge$

$\wedge\; B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset)$

$(0,1]$ $\quad x \in (0,1)$



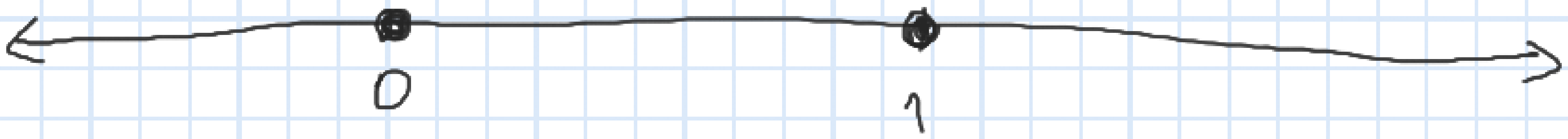
- hromadný bod x množiny A:
  $(\forall r>0)(B(x,r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset)$

$A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

VLASTNOSTI MNOŽIN

- (M,ρ), $A \subseteq M$
- A je otevřená, právě když $(\forall x \in A)(\exists r>0)(B(x,r) \subset A)$
- (a,b)

- A je uzavřená, právě když je A^c otevřená



$C = [0, 1]$

$= (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

SJEDNOCENÍ LIB. SYSTÉMU OTEVŘ. MN. JE OTEVŘ. MN.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_\alpha A_\alpha$$

- nechť A_α je otevřená $\Rightarrow (\forall x \in A_\alpha)(\exists r > 0)(B(x,r) \subset A_\alpha)$

$x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$, pak $x \in A_k \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$

- pak $(\forall x \in A_k)(\exists r > 0)\left(B(x,r) \subseteq A_k \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha\right)$

PRŮNIK KONEČNÉHO POČTU OTEVŘ. MN. JE OTEVŘ. MN.

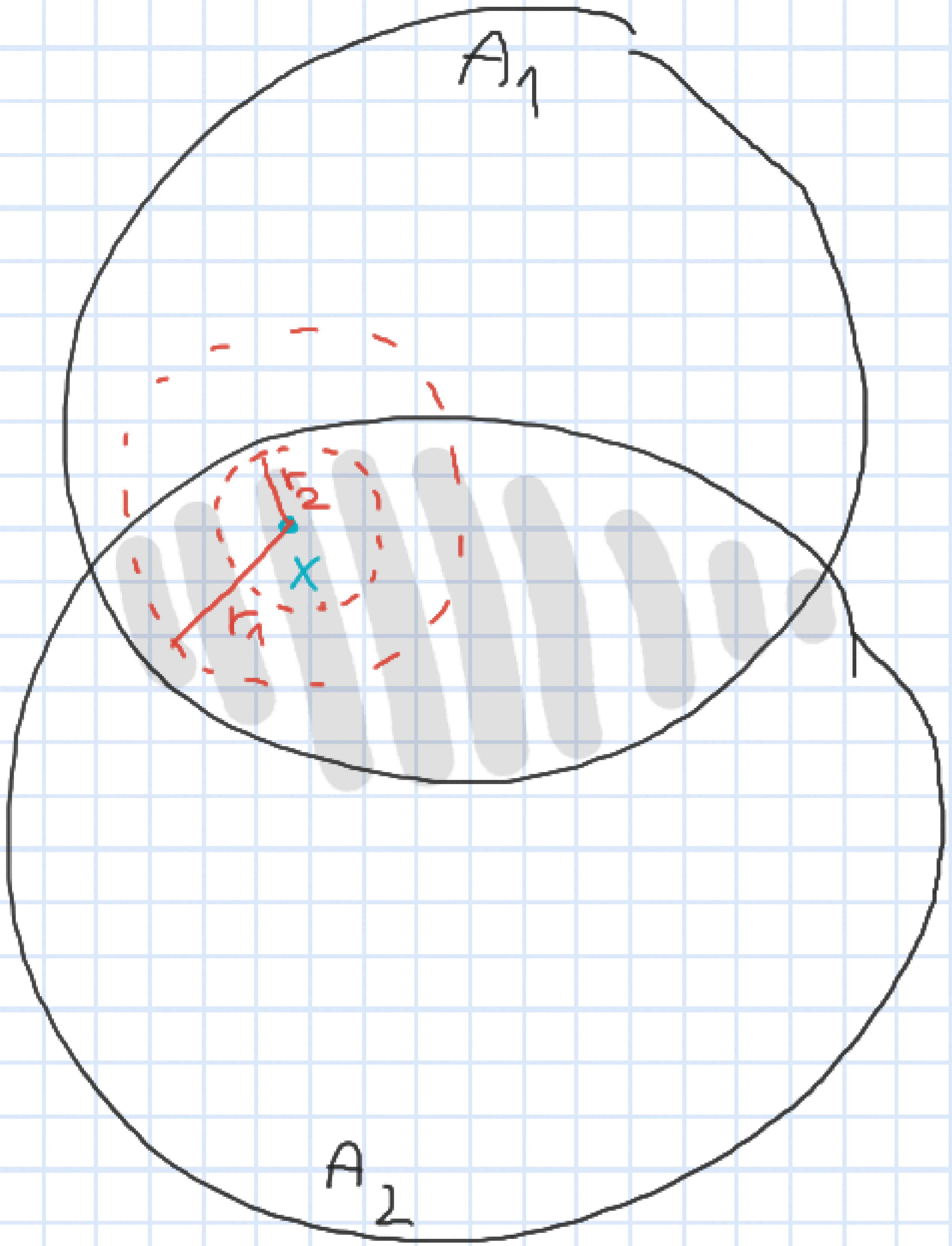
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

$$x \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

$$(\exists r_\alpha > 0)(B(x, r_\alpha) \subset A_\alpha)$$

$$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$$

$$B(x, r) \subset \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

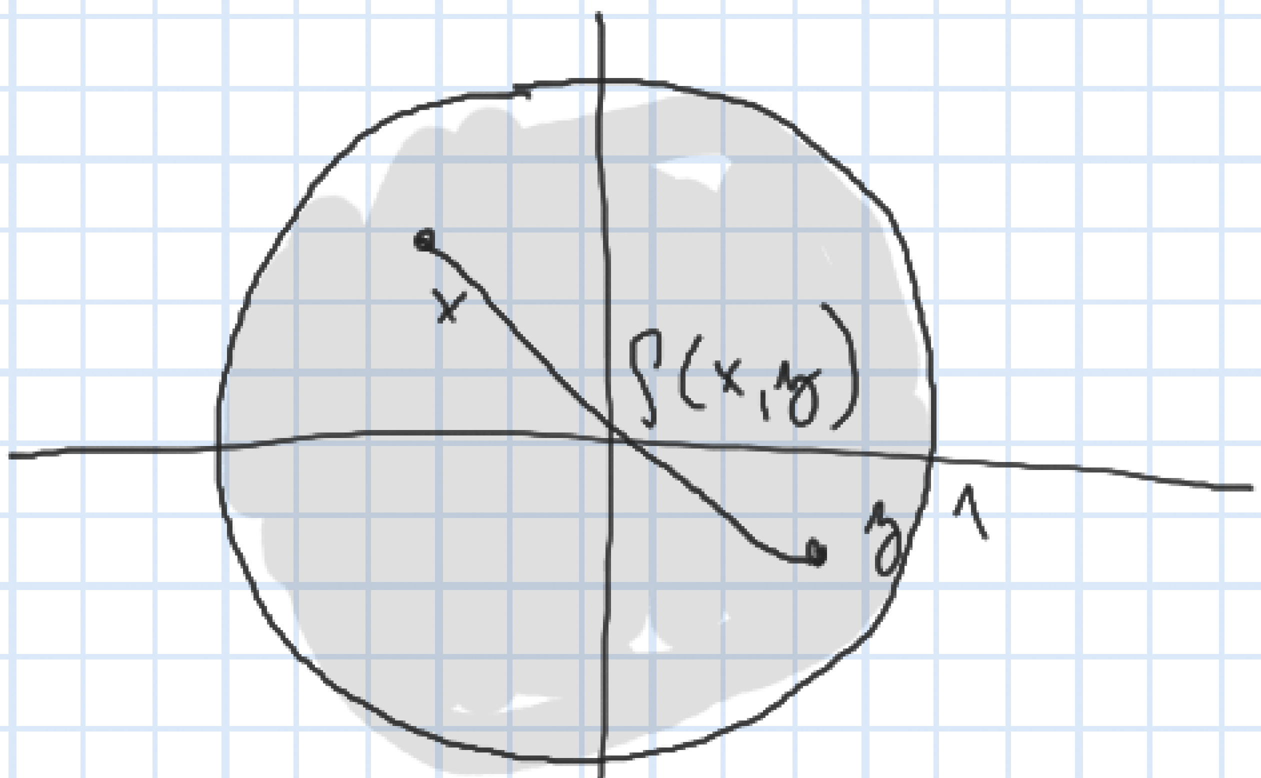


OMEZENÁ MNOŽINA

(M, ρ), $A \subseteq M$

- A je omezená, pokud

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall x, y \in A)(\rho(x,y) < r)$$



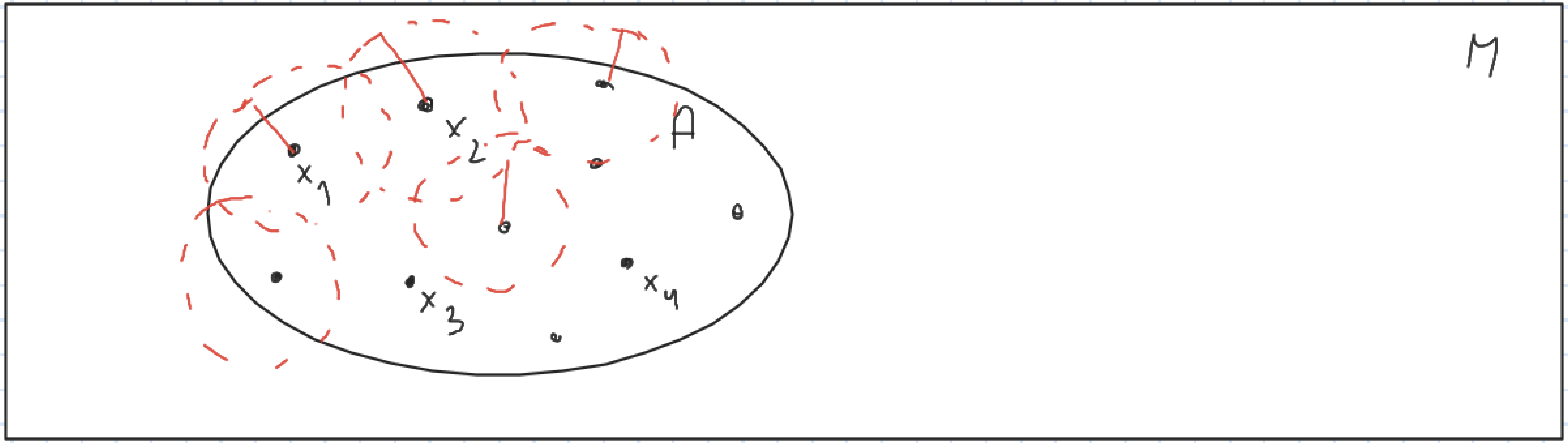
$r = 4$

$$\rho(x,y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

PREKOMPAKTNÍ MNOŽINA

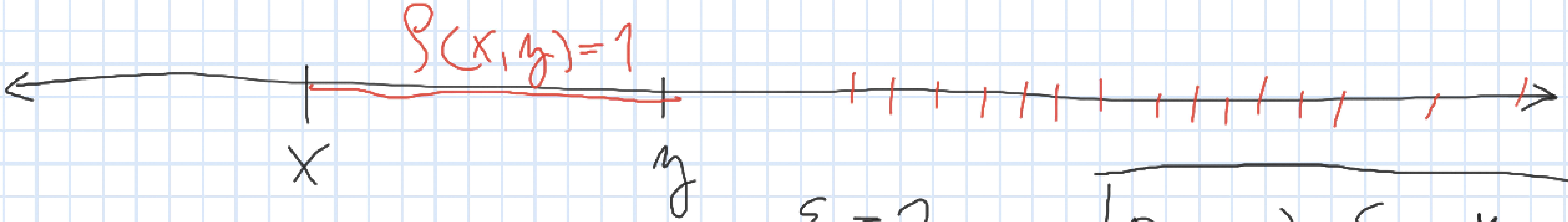
- (M, ρ), $A \subseteq M$
- A je prekompaktní, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset A)\left(A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)\right)$$



$\mathbb{R}$, diskrétní metrika – omezený, není prekompaktní

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y \\ 0 & \text{pro } x = y \end{cases}$$



$r = 2$

$\varepsilon = 2$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$B(x, \frac{1}{2})$

$$\boxed{B(x,r) = \{y \in M : \rho(x,y) < r\}}$$

KOMPAKTNÍ MNOŽINA

(M, ρ), $A \subseteq M$

- A je kompaktní, právě když je uzavřená a prekompaktní

POSLOUPNOSTI V MP

- konvergentní posloupnost:

(M, ρ), $x_n \to x$, pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\rho(x_n, x) < \varepsilon)$

- cauchyovská posl:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(m, n \geq N)(\rho(x_m, x_n) < \varepsilon)$

ÚPLNÝ METRICKÝ PROSTOR

(M,ρ) je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost má limitu

přo. $\mathbb{R}$

přo. $\mathbb{Q}$

$\exists x_n$ cauchyovská, která nemá limitu

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

SPOJITOST V BODĚ x

- (M, ρ)
- $f : P \subseteq M \to \mathbb{R}$
- f je spojitá v x, pokud platí

$$\boxed{x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)}, \quad x_n \in P$$

VĚTA O EXISTENCI EXTRÉMU NA KOMP. MN.

- (M, ρ)
- $A \subseteq M$ kompaktní
- $f : A \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}$ spojitá

pak: $(\exists m, M \in A)(\forall x \in A)$

$$\left(f(m) \leq f(x) \leq f(M) \right)$$