METRICKÝ PROSTOR (M, ρ)

M – NOSNÁ MNOŽINA

ρ – METRIKA

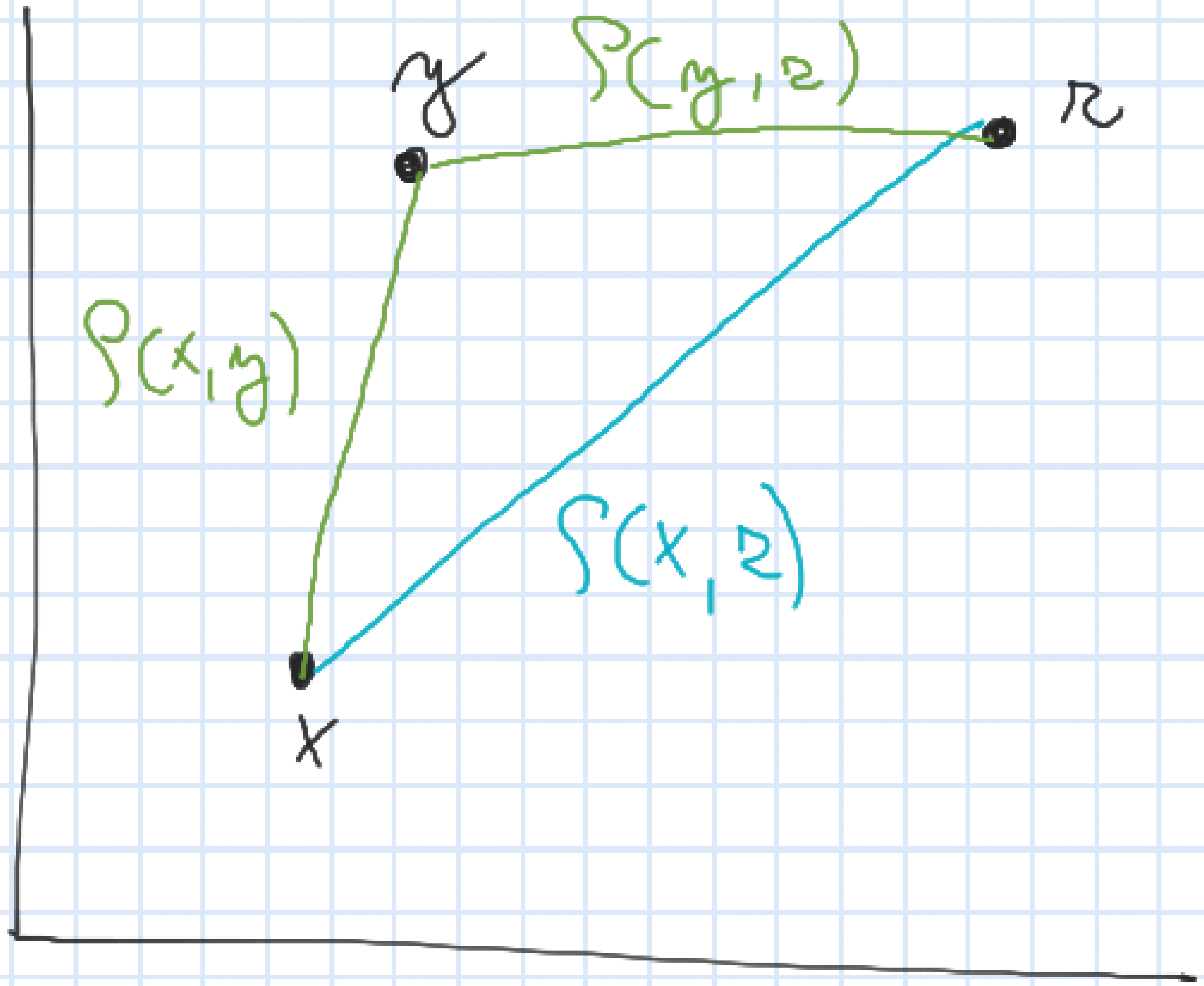
- $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$

(1) $(\forall x, y \in M)(\rho(x,y) \geq 0)$ POZITIVITA

$\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $(\forall x, y \in M)(\rho(x,y) = \rho(y,x))$ SYMETRIE

(3) $(\forall x, y, z \in M)(\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z))$ Δ NEROVNOST



LEMMA 2

- $(V, \|\cdot\|)$ NVP
- $u, v \in V$ vektory
- $\rho(u,v) = \underbrace{\|u-v\|}_{\text{norma}}$

- ukážeme, že se jedná o MP.

① POZITIVITA

$\|x\| \geq 0 \Rightarrow \|u-v\| \geq 0$

- nechť $u = v$, pak $\boxed{\rho(u,v)} =$

$= \rho(u,u) = \|u-u\| = \boxed{0}$

- nechť $\rho(u,v) = 0$, pak $\|u-v\| = 0$
- z definice normy:

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$u - v = 0$

$\boxed{u = v}$

② SYMETRIE

$\boxed{\rho(u,v)} = \|u-v\| = \|(-1)(v-u)\| =$

$= |-1| \cdot \|v-u\| = \boxed{1 \cdot \rho(v,u)}$

③ $\triangle$ NEROVNOST

- u, v, w
- chceme: $\rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$

$$\boxed{\rho(u,w)} = \|u-w\| = \|(u-v)+(v-w)\| \leq \|u-v\| + \|v-w\| =$$

$$\boxed{= \rho(u,v) + \rho(v,w)}$$

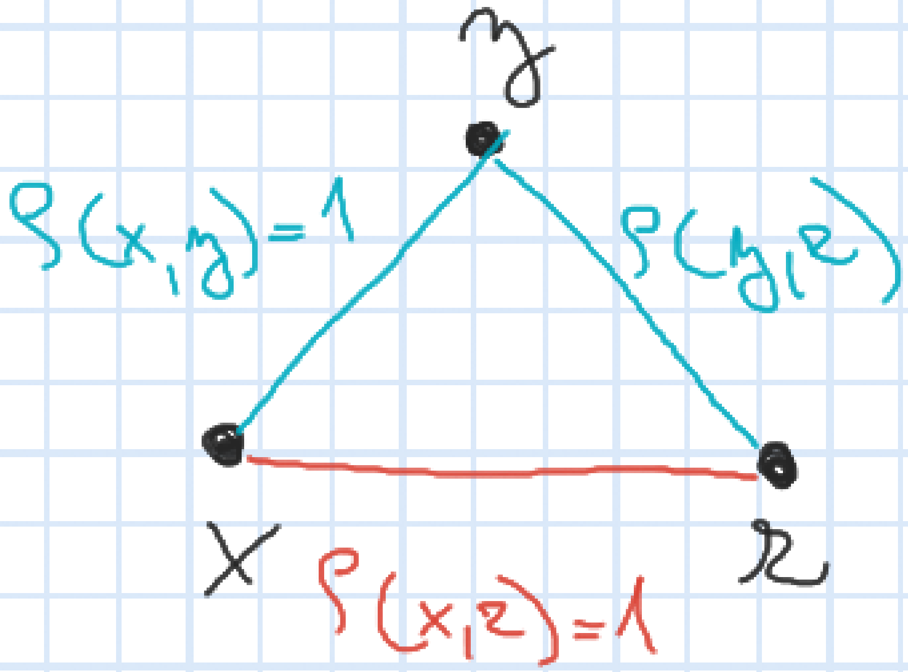
DISKRÉTNÍ METRIKA

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 1 & \text{pro } x \neq y \end{cases}$$

△ NEROVNOST $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ – chceme ukázat

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

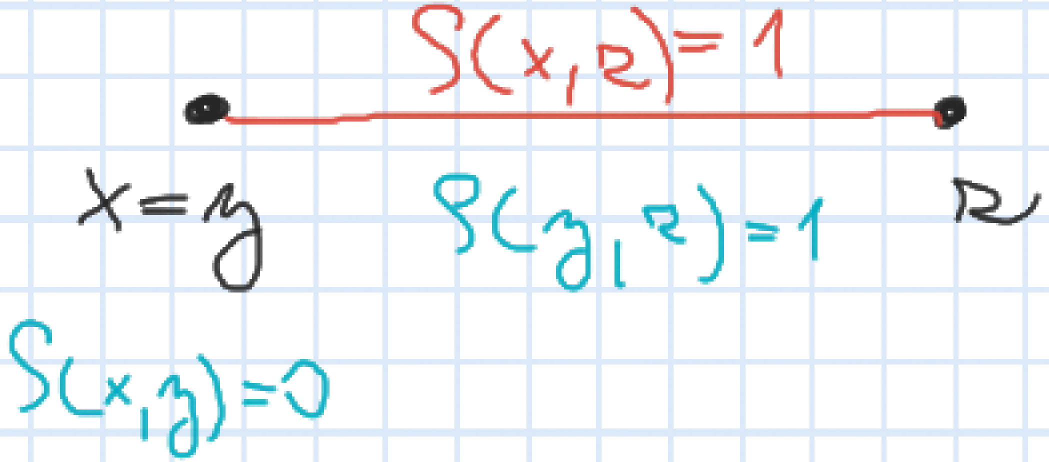
1) $x \neq y \neq z$



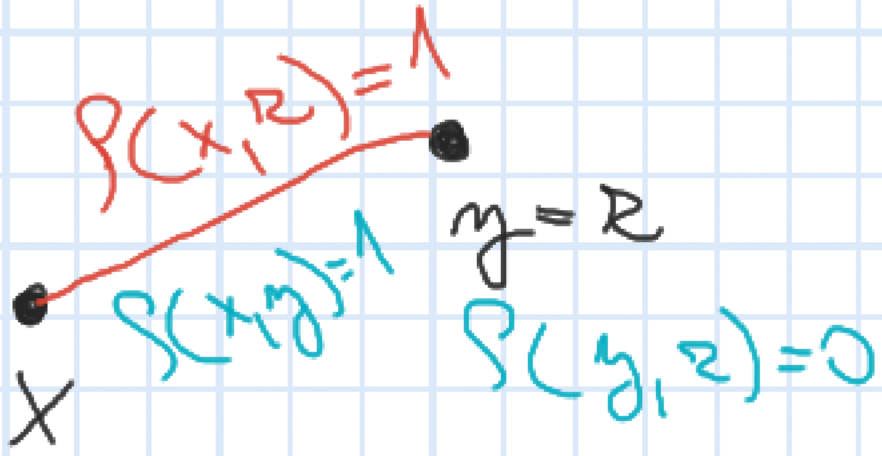
$1 \le 1 + 1$

2) $x = y \neq z$

$1 \le 0 + 1$



3) $x \neq y = z$



$1 \le 1 + 0$

4) $x = y = z$

5) $x = z \neq y$

VZTAH BODŮ A MNOŽIN

- MP (M,ρ), $A \subseteq M$

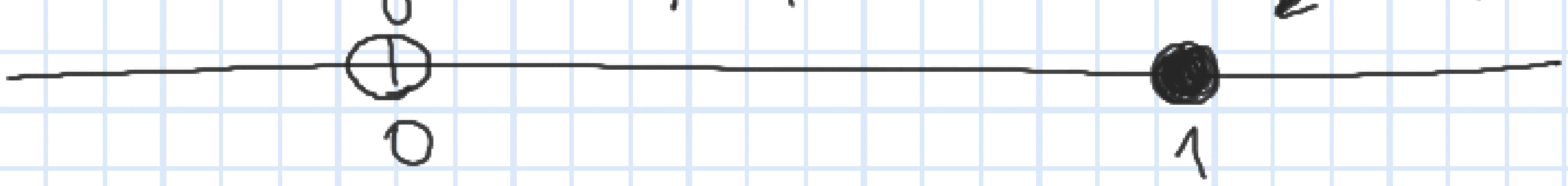
- vnitřní bod x množiny A

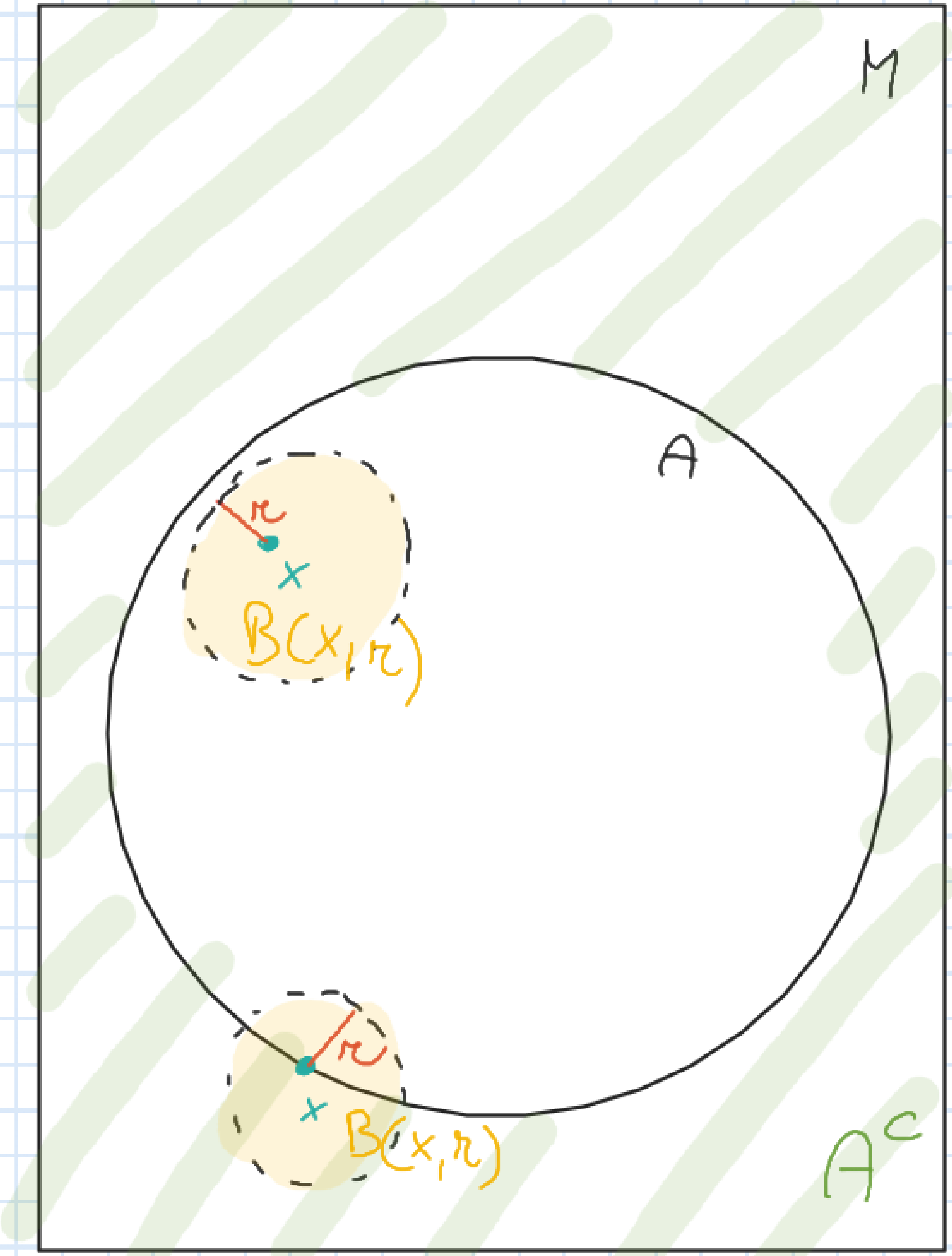
$$(\exists r>0)(B(x,r)\subset A)$$

- hraniční bod x množiny A

$$(\forall r>0)\big(B(x,r)\cap A\neq\emptyset \;\wedge\; B(x,r)\cap A^c\neq\emptyset\big)$$

vnitřní body: $x\in(0,1)$, hraniční: $\{0,1\}$ $(0,1]$





- hromadný bod x množiny A:

$$(\forall r>0)(B(x,r)\setminus\{x\}\cap A\neq\emptyset)$$

$A=\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$ má hromadný bod $x=0$

VLASTNOSTI MNOŽIN V MP

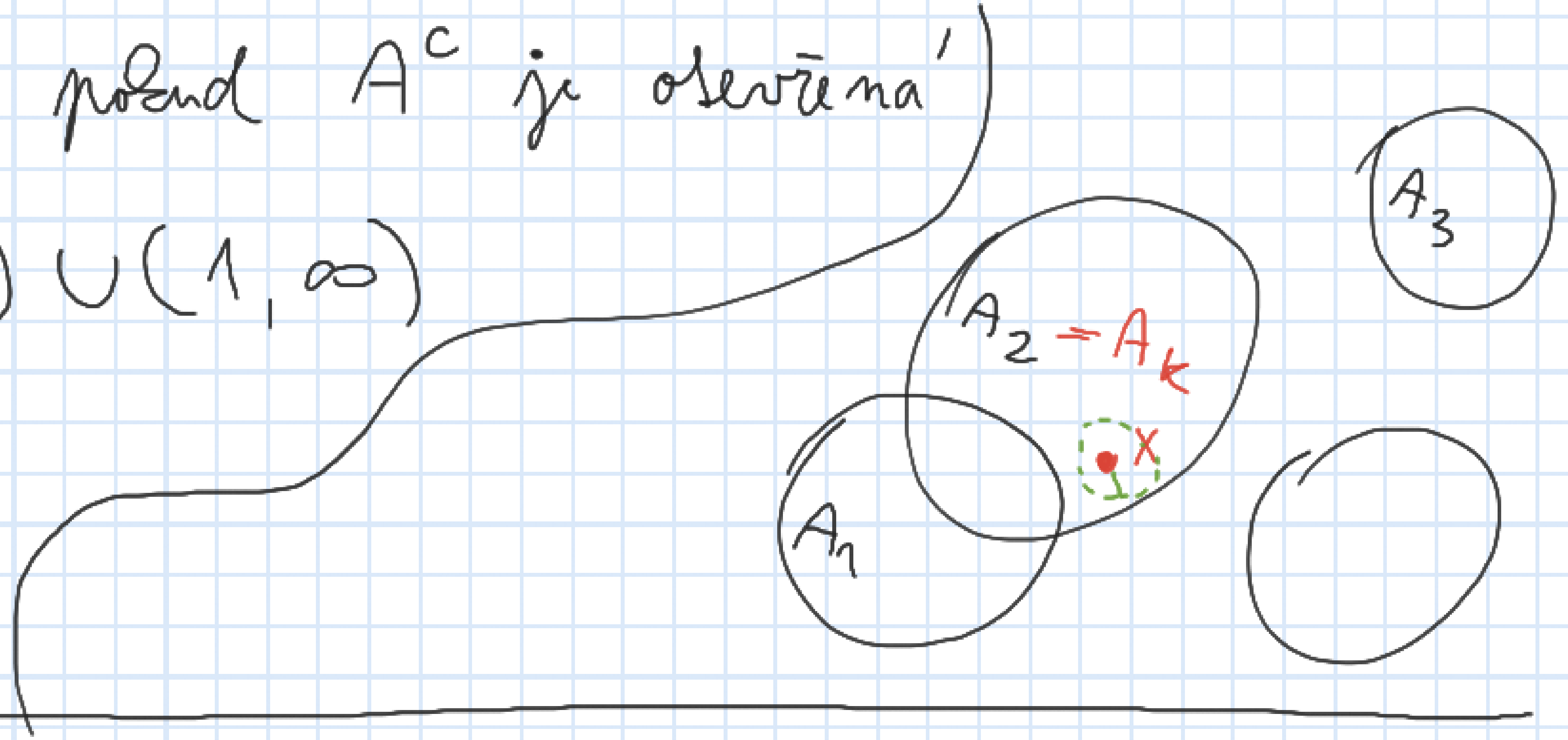
- (M,ρ), $A\subseteq M$
- A je otevřená pokud platí: $\boxed{(\forall x\in A)(\exists r>0)(B(x,r)\subset A)}$
- (a,b), $\mathbb{R}$, $\emptyset$

• množina A je uzavřená, pokud A^c je otevřená

$A=[0,1]$ $\quad A^c=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

$A=\mathbb{R}$ $\quad A^c=\emptyset$

$A=\emptyset$ $\quad A^c=\mathbb{R}$



SJEDNOCENÍ LIBOVOLNÉHO SYSTÉMU OTEVŘ. MN. JE OTEVŘ. MN

$$A_1\cup A_2\cup A_3\dots = \bigcup_\alpha A_\alpha$$

• nechť A_α je otevřená, pak platí: $(\forall x\in A_\alpha)(\exists r>0)(B(x,r)\subset A_\alpha)$

$x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$, pak $x\in A_k\subseteq\bigcup_\alpha A_\alpha$

• pak $(\forall x\in A_k)(\exists r>0)(B(x,r)\subseteq A_k\subseteq\bigcup_\alpha A_\alpha)$ □

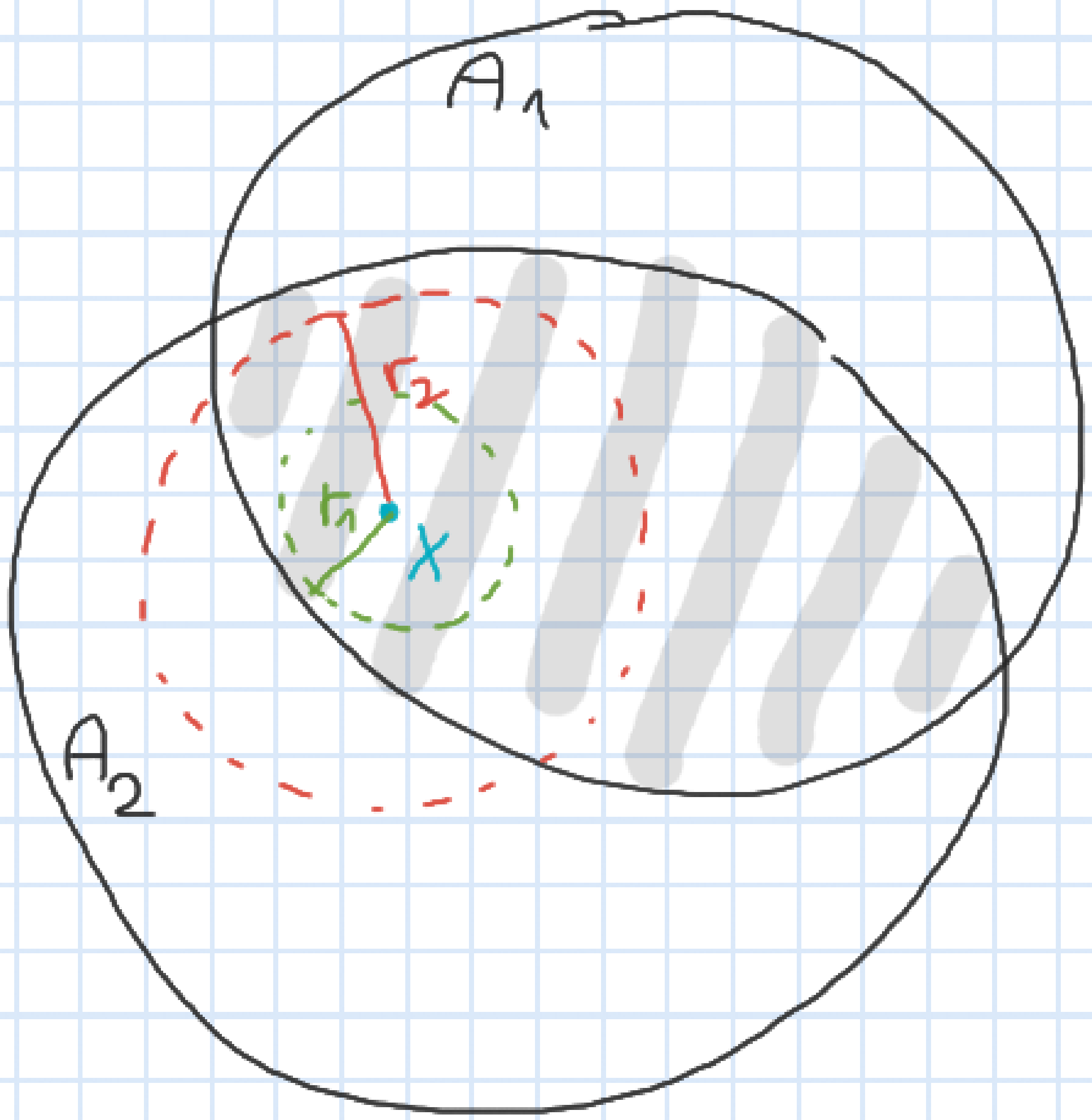
PRŮNIK KONEČNÉHO POČTU OTEVŘ. MN. JE OTEVŘ. MN.

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n = \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

- nechť $x \in \bigcap_{\alpha=1}^{n}$
- pak x je v každé A_α

$\Rightarrow (\exists r_\alpha > 0)(B(x, r_\alpha) \subset A_\alpha)$

- zvolíme $r = \min\{r_1, r_2, \dots r_n\}$
- pak $B(x,r) \subset \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$

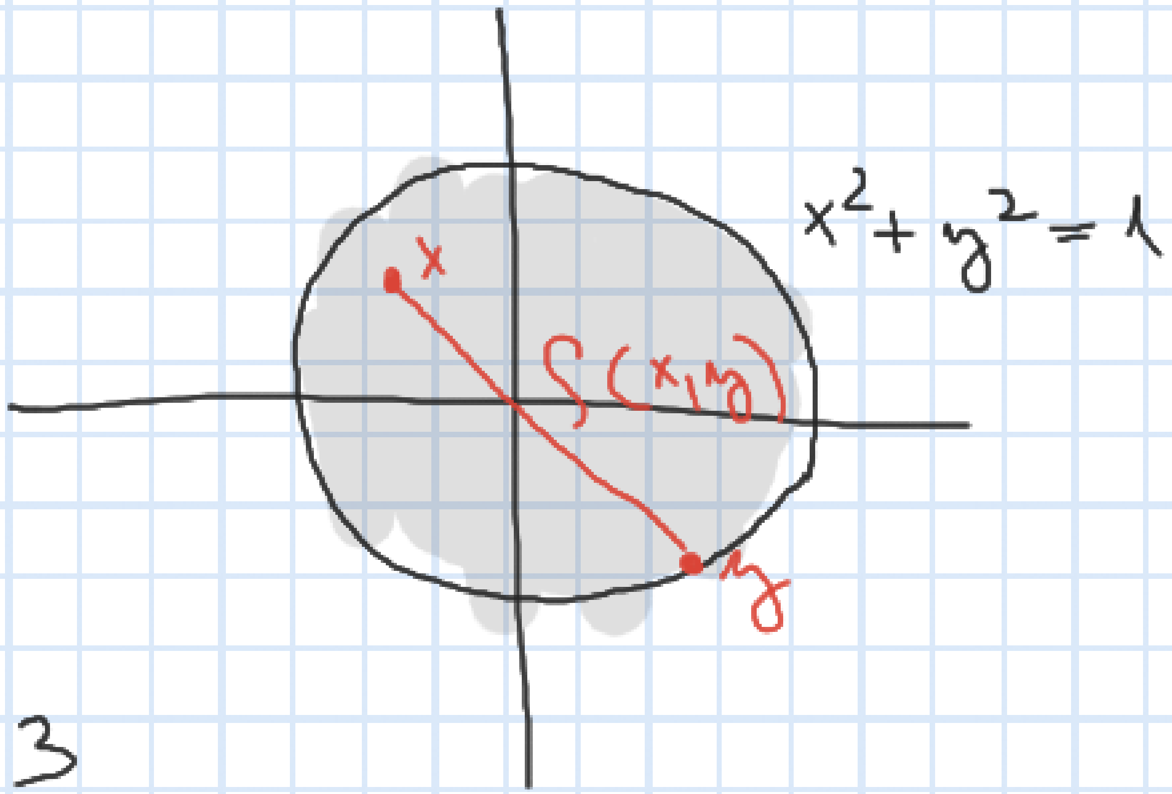


$\square$

OMEZENÁ MNOŽINA

- (M, ρ), $A \subseteq M$
- A je omezená pokud

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall x, y \in A)(\rho(x,y) < r)$$



$r = 3$

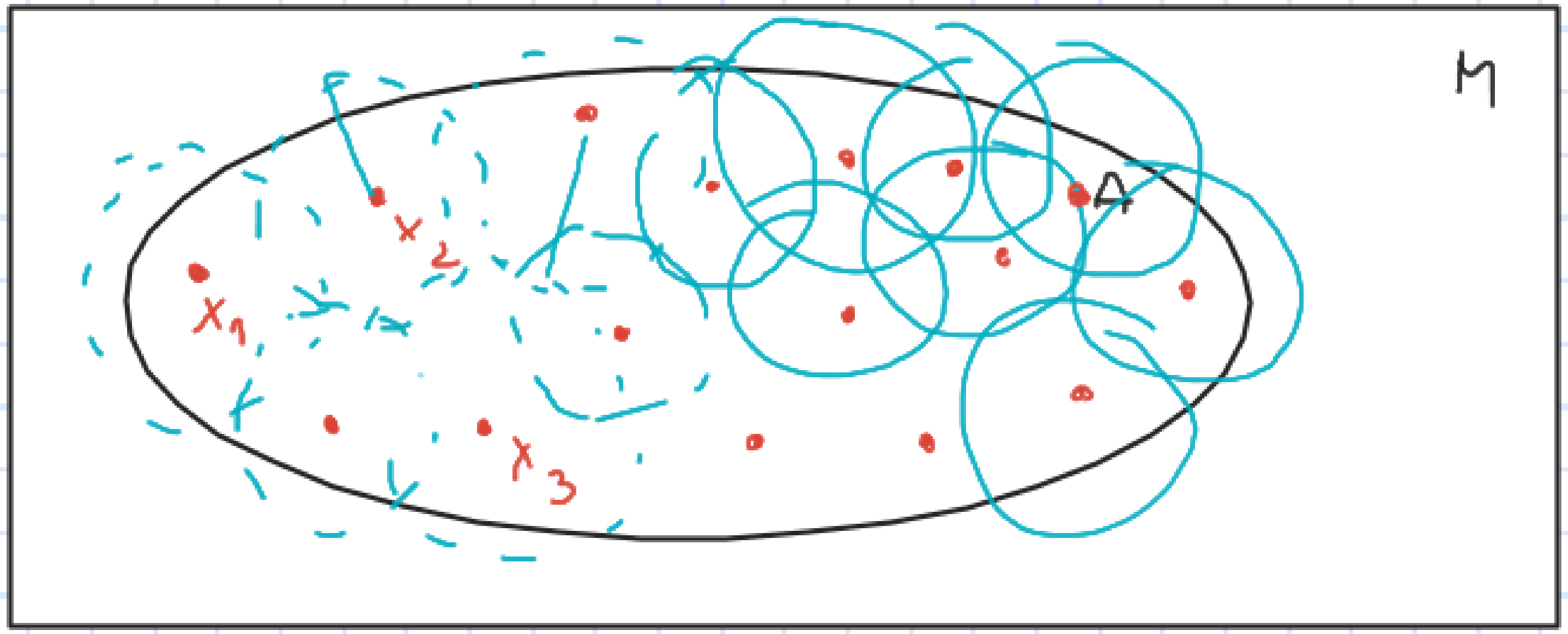
$$\|x-y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

PREKOMPAKTNÍ MNOŽINA

- (M, ρ), $A \subseteq M$
- A je prekompaktní (totálně omezená), pokud:

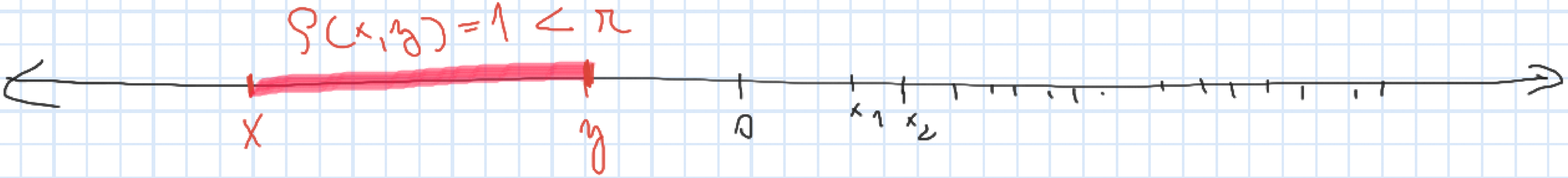
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset A)$$

$$\left(A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)\right.$$



• pozn. $\mathbb{R}$, diskrétní metrika – omezený, není prekompaktní

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y \\ 0 & \text{pro } x = y \end{cases}$$



$r = 2$

POSLOUPNOSTI V MP

KOMPAKTNÍ MNOŽINA

- (M, ρ), $A \subseteq M$
- A je kompaktní, právě když je uzavřená a prekompaktní

KONVERGENTNÍ POSL.

- (M, ρ)
- x_n konverguje k bodu $x \in M$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\rho(x_n, x) < \varepsilon)$$

CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST

- (M, ρ)
- x_n je cauchyovská, pokud platí

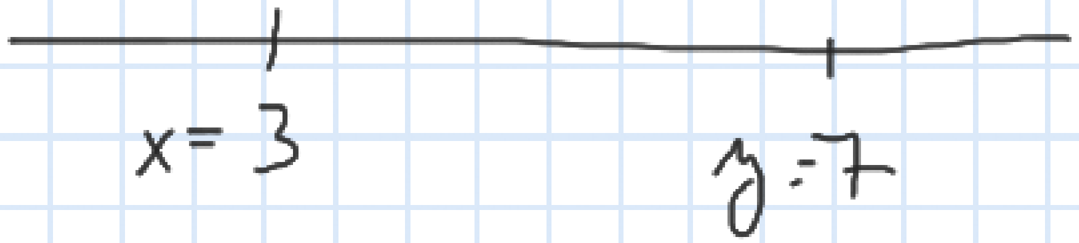
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(\rho(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

- pozn. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

ÚPLNÝ METRICKÝ PROSTOR

- (M, ρ) je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost má limitu v M

(př.) $\mathbb{R}$ jsou úplná $(\mathbb{R}, |x-y|)$



(př.) $(\mathbb{Q}, |x-y|)$

$\exists\, x_n$ cauchyovská, která nemá limitu v M

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \notin \mathbb{Q}$$

SPOJITOST FUNKCE V BODĚ X

- MP (M,ρ)
- $f: A \subset M \longmapsto \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x, pokud pro $x_n \in P$ platí:

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$$

VĚTA O EXISTENCI EXTRÉMU SPOJITÉ FUNKCE NA KOMPAKTNÍ MN:

- MP (M,ρ)
- $A \subset M$ kompaktní
- $f: A \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ spojitá na A
- pak $(\exists m, M \in A)(\forall x \in A)\big(f(m) \le f(x) \le f(M)\big)$