Metrické prostory pro studenty učitelství matematiky

Libuše Špačková, Martina Šimůnková

29. ledna 2024

1 Úvod

Definice 1 (Metrického prostoru)**.** Nechť M je množina, $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ zobrazení splňující

1. $(\forall x, y \in M)(\varrho(x, y) \geq 0)$, přitom $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $(\forall x, y \in M)(\varrho(x, y) = \varrho(y, x))$
3. $(\forall x, y, z \in M)(\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z))$

Dvojici (M, ϱ) nazveme *metrickým prostorem*, množinu M *nosnou množinu metrického prostoru*, zobrazení ϱ *metrikou.*

Lemma 2 (Metrický prostor odvozený od normy)**.** *Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný metrický prostor. Pro $u, v \in V$ nechť je $\varrho(u, v) = \|u - v\|$.*
Pak je (V, ϱ) metrický prostor.

Důkaz. 1. Pozitivita.

(i) Z definice normy je $\|x\| \geq 0$, a tudíž $\|u - v\| \geq 0$.

(ii) Nechť $u = v$. Pak $\varrho(u, v) = \varrho(u, u) = \|u - u\| = 0$.

(iii) Nechť $\varrho(u, v) = 0$. Pak $\|u - v\| = 0$, ale z definice normy je $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ a tak $u = v$.

2. Symetrie. $\varrho(u, v) = \|u - v\|$
$\varrho(v, u) = \|v - u\| = \|(-1)(u - v)\| = |-1|\|u - v\| = \varrho(u, v)$

3. Trojúhelníková nerovnost.
   $\varrho(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = \varrho(u, v) + \varrho(v, w)$

$\square$

Příklad 3 (Diskrétní metrika)**.** Definujme

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 1 & \text{pro } x \neq y \end{cases}$$

Ukážeme, že se skutečně jedná o metriku. Pozitivita a symetrie vyplývají přímo z definice. Abychom ukázali trojúhelníkovou nerovnost, musíme si rozepsat všechny případy:

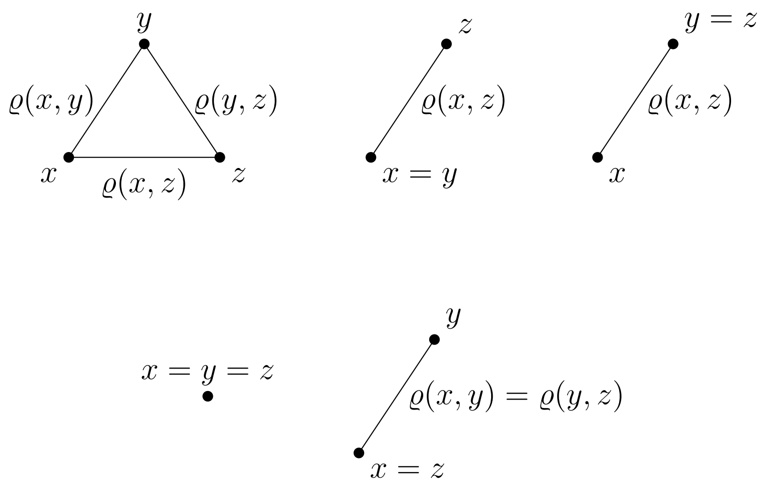
(i) $x \neq y \neq z \implies 1 \leq 1 + 1$

(ii) $x = y \neq z \implies 1 \leq 0 + 1$

(iii) $x \neq y = z \implies 1 \leq 1 + 0$

(iv) $x = y = z \implies 0 \leq 0 + 0$

(v) $x = z \neq y \implies 0 \leq 1 + 1$



2 Vztahy bodů a množin v metrických prostorech

Definice 4 (Vztah bodu a množiny)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $A \subset M$.

(i) Řekneme, že x je *vnitřní bod* množiny A, pokud platí

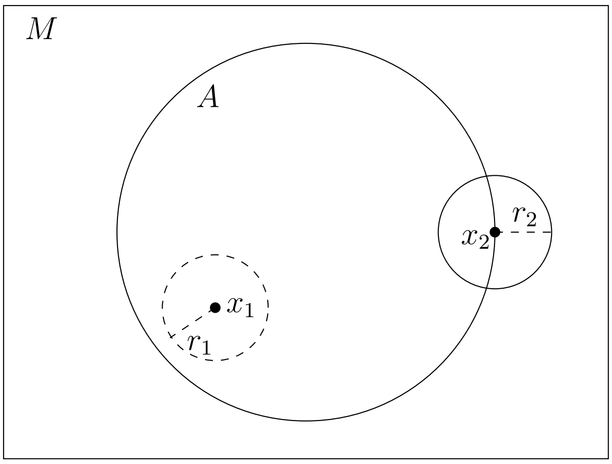
$$(\exists r > 0)(B(x,r) \subset A)$$

(ii) Řekneme, že x je *hraniční bod* množiny A, pokud platí

$$(\forall r > 0)(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset)$$

(iii) Řekneme, že x je *hromadný bod* množiny A, pokud platí

$$(\forall r > 0)(B(x,r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset)$$



Poznámka 5. Pro vnitřní bod x množiny A platí $x \in A$. Hromadný a hraniční bod množiny A může a nemusí být prvkem A.

Příklad 6. $M = \mathbb{R}$, $\varrho(x,y) = |x - y|$

1. $A = [0,1)$:
   body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ jsou hraničními body množiny A,
   body $x \in (0,1)$ jsou vnitřními body množiny A,
   body $x \in [0,1]$ jsou hromadnými body množiny A.

2. $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   Bod $x = 0$ je hromadným i hraničním bodem množiny B,
   množina B nemá žádný vnitřní bod,
   všechna $x \in B$ jsou hraničními body množiny B.

3. $C = \mathbb{Z}$:
   všechna $x \in C$ jsou hraniční body množiny C,
   množina C nemá žádný vnitřní ani hromadný bod.

Příklad 7. $M = \mathbb{R}^2$, $\varrho(u, v) = \|u - v\|_2 = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

1. $D = \{[x, y] : x^2 + y^2 < 1\}$, $E = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 1\}$:
   body $[x, y]$ splňující $x^2 + y^2 = 1$ jsou hraničními body množiny D i množiny E,
   všechna $x \in D$ jsou vnitřními body množiny D i množiny E,
   všechna $x \in E$ jsou hromadnými body množiny D i množiny E.

2. $F = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$:
   množina F nemá vnitřní body,
   všechny body $x \in M$ jsou hromadnými i hraničními body množiny F.

3 Vlastnosti množin v metrických prostorech

Definice 8 (Otevřená a uzavřená množina)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $A \subset M$. Řekneme, že množina A je *otevřená*, pokud platí

$$(\forall x \in A)(\exists r > 0)(B(x, r) \subset A)$$

Množina A je *uzavřená*, pokud je její doplněk otevřená množina.

Poznámka 9.

1. V metrickém prostoru (M, ϱ) jsou množiny M, $\emptyset$ otevřené (a tedy i uzavřené).

2. V příkladech 6, 7 je D jedinou otevřenou množinou a C jedinou uzavřenou množinou.

Tvrzení 10. Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

Důkaz. Nechť A_α je otevřená množina. Pak platí $(\forall x \in A_\alpha)(\exists r > 0)(B(x, r) \subset A_\alpha)$.
Nechť

$$x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$$

Pak x je v nějaké množině

$$A_K \subseteq \bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

Protože je A_K otevřená, pak $(\forall x \in A_K)(\exists r > 0)(B(x,r) \subset A_K \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha)$. Máme tedy otevřenou kouli $B(x,r)$ v A_K a tato koule je zřejmě obsažena i v její nadmnožině $\bigcup_\alpha A_\alpha$. Toto platí pro všechna x a tím je tvrzení dokázáno.

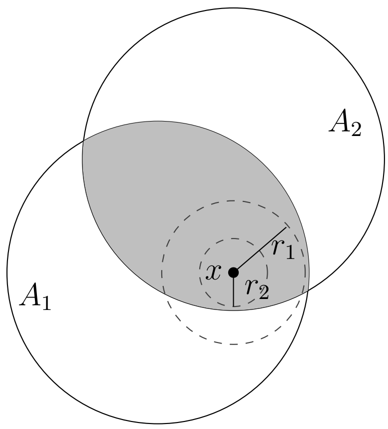
□

Tvrzení 11. Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Důkaz. Nechť

$$x \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$$

Pak x je v každé množině A_α. To znamená, že pro každé A_α existuje poloměr r_α takový, že $B(x, r_\alpha) \subset A_\alpha$. Zvolíme $r = min\{r_1, r_2, \ldots r_n\}$. Pak platí $B(x,r) \subset A_\alpha$ pro všechna α, protože $B(x,r) \subset B(x,r_\alpha) \subset A_\alpha$.



Ukázali jsme, že existuje poloměr r, že $B(x,r) \subset A_\alpha$ pro všechna α, a tedy tato otevřená koule je v průniku $\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$.

□

Definice 12 (Omezená množina)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $A \subset M$. Řekneme, že množina A je omezená, pokud platí

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall x, y \in A)(\varrho(x,y) < r)$$

Definice 13 (Prekompaktní množina)**.** Množina je *prekompaktní* neboli *totálně omezená*, právě když platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset A)(A \subset \bigcup_i B(x_i, \varepsilon))$$

Poznámka 14. Pro nosnou množinu lineárního vektorového prostoru konečné dimenze je prekompaktnost ekvivalentní s omezeností.

Obecně takové tvrzení neplatí: metrický prostor s nespočetnou nosnou množinou, například $\mathbb{R}$, a diskrétní metrikou je omezený, ale není prekompaktní.

Definice 15 (Kompaktní množina)**.** Množina je kompaktní, právě když je uzavřená a prekompaktní.

4 Posloupnosti v metrických prostorech

Definice 16 (Konvergentí posloupnost)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost x_n *konverguje* k bodu $x \in M$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\varrho(x_n, x) < \varepsilon)$$

Definice 17 (Cauchyovská posloupnost)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost x_n je cauchyovská, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

Poznámka 18. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice 19 (Úplný metrický prostor)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Metrický prostor je *úplný*, jestliže každá Cauchyovská posloupnost má limitu v M.

Příklad 20 (Úplnost reálných čísel)**.** Reálná čísla jsou úplná, protože každá reálná cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Příklad 21 (Neúplnost racionálních čísel)**.** Abychom, ukázali, že množina $\mathbb{Q}$ není úplná, musíme najít cauchyovskou posloupnost racionálních čísel, která není konvergentní v $\mathbb{Q}$. Jedním takovým příkladem může být posloupnost $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, která je sice cauchyovská, ale není konvergentní v $\mathbb{Q}$.

5 Vlastnosti funkcí na metrických prostorech

Definice 22 (Spojitost funkce v bodě x)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Funkce $f : P \subset M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x, pokud pro každou posloupnost $x_n \in P$ platí:

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$$

Poznámka 23. Uvedená definice spojitosti v bodě x_0 je ekvivalentní s definicí pomocí okolí bodů:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B(x_0, \delta) \cap P)(f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon))$$

Definice 24 (Spojitost funkce)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Funkce $f : P \subset M \to \mathbb{R}$ je spojitá, pokud pro každou posloupnost $x_n \in P$ platí:

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$$

Věta 25 (O existenci extrému spojité funkce na kompaktní množině)**.** *Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Nechť $A \subset M$ je kompaktní a $f : P \subset M \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak*

$$(\forall x \in A)(\exists a, b \in A)(f(a) \leq f(x) \leq f(b))$$

Jinými slovy: funkce na kompaktní množině nabývá minima a maxima.

Příklad 26. Naším úkolem je najít maximální a minimální hodnotu funkce f na množině M.

1. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 2y$,
   $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5\}$
   Protože je funkce f spojitá na množině M a množina M je kompaktní, plyne z věty existence bodů $a, b \in M$, ve kterých f nabývá na M maxima a minima, tedy pro které platí

   $$(\forall c \in M)(f(a) \leq f(c) \leq f(b))$$

   Pokud je a vnitřním bodem množiny M, je též stacionárním bodem funkce f. Pokud je a hraničním bodem množiny M, má v něm f extrém vázaný na svoji hranici. Totéž platí pro bod b.

   Odtud plyne následující postup:

   Nalezneme stacionární body funkce f ležící uvnitř množiny M: po výpočtu vyjde $S_1 = [2, 1]$.

   Nalezneme extrémy vázané na hranici množiny M: po výpočtu vyjde $V_1 = [1/2, 0]$, $V_2 = [8/3, 7/3]$

   Víme, že body a, b jsou některé z bodů S_1, V_1, V_2. Které to jsou zjistíme výpočtem funkčních hodnot

   $$f(S_1) = 0, \quad f(V_1) = -1/4, \quad f(V_2) = 4/3$$

   a dojdeme k závěru, že maximální hodnota funkce f na množině M je $f(V_2) = 4/3$ a minimální hodnota je $f(V_1) = -1/4$.

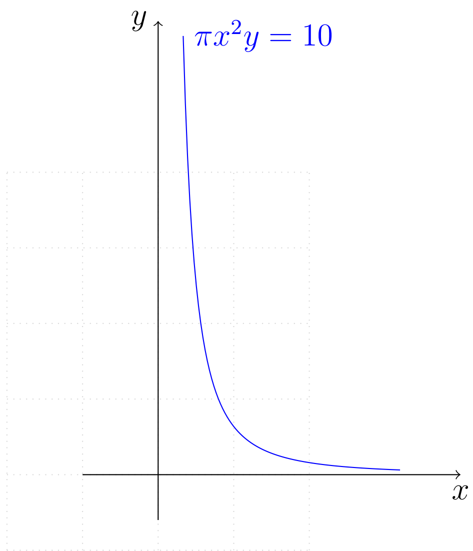
2. $f(x,y) = \pi x^2 + 2\pi xy$

   $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \pi x^2 y = 10\}$

   Množina M není kompaktní, nemůžeme tedy přímo použít větu.

   Spočítáme limity f na množině M pro $x \to \infty$, $y \to \infty$: vyjde v obou případech ∞. Odtud plyne, že funkce nemá na M maximum.

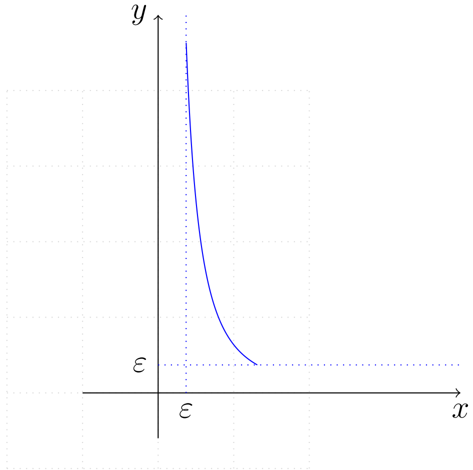
   (Zdůvodněme tvrzení o limitách: pro $x \to \infty$ je $f(x,y) \geq \pi x^2 \to \infty$. Pro $y \to \infty$ vyjádříme z vazby $x = \sqrt{10/(\pi y)}$ a dostaneme $x \to 0$ a odtud $f(x,y) \geq 2\pi xy = 20/x \to \infty$.)



   Abychom mohli použít větu, „uřízneme“ z množiny M konce, na kterých se f blíží k nekonečnu. Pro $\varepsilon > 0$ dostaneme množinu, která je kompaktní

$$M_\varepsilon = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq \varepsilon, y \geq \varepsilon, \pi x^2 y = 10\}$$

   Na této množině f nabývá svého minima, které je pro dostatečně malé ε zároveň minimem f na množině M. Bod, ve kterém f toto minimum nabývá najdeme metodou lagrangeových multiplikátorů.



y
ε
ε
x