Písemná část zkoušky z AN3

6. ledna 2024

1. Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [-1, 2]$. Vypočtěte gradienty $\nabla f(B)$, $\nabla g(B)$ a umístěte je do bodu B.

$$f(x, y) = x + y^2, \qquad g(x, y) = x^2 - 4x + y^2$$

1* Vypočítejte determinant matice, jejíž sloupce jsou gradienty, které jste spočítali. Uveďte geometrický význam tohoto determinantu. Pak využijte tento geometrický význam a náčrtek k odhadnutí a zkontrolování hodnoty determinantu.

2. Vypočtěte Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce f v bodě A a zjistěte vzájemnou polohu jejich grafů v okolí bodu A (tj. jestli jeden z grafů leží nad druhým, nebo jestli se protínají).

$$f(x, y) = \frac{x}{(x + y)^2} \qquad A = [2, -1]$$

2* Uveďte definici indefinitní matice a objasněte, jak tato definice souvisí s určením vzájemné polohy grafů.

3. Uzavřený válcový sud s objemem 180 litrů se bude vyrábět z dvojího plechu: na podstavu válce se užije materiál dvakrát dražší než na jeho plášť. Jak se má zvolit poměr výšky h válce a poloměru r podstavy, aby cena celého sudu byla co nejmenší?

3* Načrtněte křivku na které hledáte vázaný extrém a na ní vyznačte bod tohoto extrému. Dále do tohoto bodu umístěte gradient funkce, jejíž extrém hledáte.

4. Načrtněte obrazce O_1, O_2, odhadněte polohy jejich těžišť a poté vypočtěte polohu jednoho z těžišť.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \le y \le 3 - x^2\} \\ O_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi/2] \wedge y \in [0, \cos(x)]\} \end{aligned}$$

4* Vypočtěte polohu obou těžišť.

5. Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \qquad I = (0, 8)$$

5*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}, \qquad I = (0, 8)$$