Písemná část zkoušky z AN3

23. ledna 2024

1. Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [1, 2]$. Vypočtěte gradienty $\nabla f(B)$, $\nabla g(B)$ a umístěte je do bodu B.

$$f(x, y) = 2x - y^2, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

1* Vypočítejte determinant matice, jejíž sloupce jsou gradienty, které jste spočítali. Uveďte geometrický význam tohoto determinantu. Pak využijte tento geometrický význam a náčrtek k odhadnutí a zkontrolování hodnoty determinantu.

2. Vypočtěte Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce f v bodě A a zjistěte vzájemnou polohu jejich grafů v okolí bodu A (tj. jestli jeden z grafů leží nad druhým, nebo jestli se protínají).

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y} \qquad A = [1, 0]$$

2* Uveďte definici pozitivně definitní matice a objasněte, jak tato definice souvisí s určením vzájemné polohy grafů.

3. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ.

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y}$$

3* Jaké minimální a maximální hodnoty nabývá funkce f na čtverci $(0, 1] \times (0, 1]$?

4. Načrtněte obrazce O_1, O_2, odhadněte polohy jejich těžišť a poté vypočtěte polohu jednoho z těžišť.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 3 - x \le y \le 3 - x^2\} \\ O_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi/2] \wedge y \in [0, \cos(x)]\} \end{aligned}$$

4* Vypočtěte polohu obou těžišť.

5. Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \qquad I = (1, 4)$$

5*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}, \qquad I = (1, 4)$$