Písemná část zkoušky z AN3

2. února 2024

1. Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [1,1]$. Vypočtěte gradienty $\nabla f(B)$, $\nabla g(B)$ a umístěte je do bodu B.

$$f(x,y) = x^2 + 3x + y^2, \qquad g(x,y) = x - y^2$$

1* Vypočítejte determinant matice, jejíž sloupce jsou gradienty, které jste spočítali. Uveďte geometrický význam tohoto determinantu. Pak využijte tento geometrický význam a náčrtek k odhadnutí a zkontrolování hodnoty determinantu.

2. Vypočtěte Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce f v bodě A a zjistěte vzájemnou polohu jejich grafů v okolí bodu A (tj. jestli jeden z grafů leží nad druhým, nebo jestli se protínají).

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x+y} \qquad A = [1,0]$$

2* Uveďte definici pozitivně definitní matice a objasněte, jak tato definice souvisí s určením vzájemné polohy grafů.

3. Na elipse s hlavními vrcholy $A[-2,0]$, $B[2,0]$ a s vedlejší osou velikosti $b = 1$ nalezněte minimální a maximální hodnotu funkce

$$f(x,y) = x + y$$

3* Elipsu načrtněte a pomocí vrstevnic funkce f nalezněte body, ve kterých funkce f nabývá na elipse extrémních hodnot. Výsledek náčrtku porovnejte s výsledkem výpočtu.

4. Načrtněte obrazce O_1, O_2, odhadněte polohy jejich těžišť a poté vypočtěte polohu jednoho z těžišť.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi] \wedge y \in [0, \cos(x)]\} \\ O_2 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x - x^2\} \end{aligned}$$

4* Vypočtěte polohu obou těžišť.

5. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje mocninná řada.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^k$$

5* Určete součet této řady.