Text k předmětu **AN3** na FP TUL

15. září 2023

Modře jsem vyznačila části, které studentům doporučuji přečíst před naším prvním setkáním. Týká se především dálkařů.

Začneme opakováním funkce jedné proměnné. Navážeme přehledem pro funkce dvou proměnných, budeme ukazovat analogie, u jednotlivých pojmů vypočteme jednoduchý příklad.

Funkce jedné proměnné – heslovitě

- Graf funkce f s definičním oborem D je možina

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in D \wedge y = f(x)\}$$

  Logickou spojku $\wedge$ někdy nahrazujeme čárkou

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in D, y = f(x)\}$$

- Spojitost funkce f v bodě x_0 zapsaná různými vzájemně ekvivalentními způsoby

  1. Pomocí intervalů

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta))(f(x) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon))$$

  2. Intervaly napíšeme jako okolí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) \in U_\varepsilon(f(x)))$$

  3. Pomocí absolutní hodnoty (její geometrický význam je vzdálenost)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon)$$

- Derivace funkce f v bodě x_0

  1. Zapsaná pomocí přírůstku h

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. Zapsaná pomocí $x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Lagrangeova věta o střední hodnotě:

  Z definice derivace plyne, že pro malé h platí $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \doteq f'(x)$, Lagrangeova věta říká, že (i pro větší h) mezi x a $x+h$ existuje c, že platí rovnost $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(c)$.

  Oba vztahy můžeme upravit do tvaru

  $$f(x+h) - f(x) \doteq f'(x)h \qquad f(x+h) - f(x) = f'(c)h$$

  případně do tvaru

  $$f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h \qquad f(x+h) = f(x) + f'(c)h$$

  Porovnejte s rovnicí tečny a Taylorovým polynomem prvního stupně.

- Aproximační vlastnosti derivace (diferenciál funkce):

  $$f(x+h) - f(x) \sim f'(x)h$$

  Kvalitu aproximace

  $$f(x+h) \sim f(x) + Ah$$

  měříme výrazy (a jejich limitami v nule) – zajímá nás, zda jsou hodnoty výrazů malé a tedy, zda jsou jejich limity rovny nule

  $$(f(x+h) - f(x)) - Ah, \qquad \frac{(f(x+h) - f(x)) - Ah}{h}$$

  Výraz vlevo má limitu rovnu nule pro $h \to 0$ právě když je funkce f v bodě x spojitá.
  Výraz vpravo má limitu rovnu nule pro $h \to 0$ právě když je $A = f'(x)$ (odtud plyne spojitost f v bodě x).

  Důkaz uvedených tvrzení:
  $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ právě když je funkce f v bodě x spojitá. Odtud plyne $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x) = 0$ a $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) - Ah = 0$.
  Druhé tvrzení (pro výraz vpravo) plyne z
  $\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))-Ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))}{h} - A = f'(x) - A$

- Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 stupně nula

$$T_0(x) = f(x_0)$$

stupně jedna

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0)$$

stupně dva

$$T_2(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 = T_1(x)+\tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$\vdots$$

stupně n

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \tfrac{1}{n}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Poznámka: rovnici tečny v bodě x_0 lze zapsat pomocí Taylorova polynomu stupně jedna

$$y = T_1(x)$$

- Aproximační vlastnost Taylorova polynomu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Stejný vztah napsaný pomocí přírůstku h

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - T_n(x_0 + h)}{h^n} = 0$$

- Poznámka: aproximační vlastnost je zobecněním aproximačních vlastností diferenciálu na polynomy vyššího stupně.

- Zbytek Taylorova polynomu

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Pomocí zbytku zapíšeme aproximační vlastnost Taylorova polynomu ve tvaru

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

- Lokální extrém, derivace, Taylorův polynom druhého stupně:
  Nechť f je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$, T_2 je Taylorův polynom stupně dva funkce f v bodě x_0. Nechť T_2 nabývá v bodě x_0 ostrého lokálního extrému, tj. pro případ lokálního minima platí (v případě maxima je opačná nerovnost $<$)

  $$(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) > f(x_0))$$

  Pak funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního extrému stejného typu jako T_2 (tj. minima či maxima).

  Důkaz tvrzení: T_2 je polynom stupně dva (nebo menšího). Pokud nabývá v bodě x_0 lokálního extrému, má následující tvar, přitom typ extrému závisí na znaménku a (pro $a > 0$ minimum, pro $a < 0$ maximum)

  $$T_2(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$$

  Z aproximační vlastnosti Taylorova polynomu plyne existence $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(x_0)$ je

  $$\frac{|R(x)|}{(x - x_0)^2} < \frac{a}{2}$$

  odtud plyne

  $$f(x) - f(x_0) \in \left(\frac{a}{2}(x - x_0)^2, \frac{3a}{2}(x - x_0)^2\right)$$

  a odtud plyne naše tvrzení o lokálním extrému funkce v bodě x_0.

- Poznámka: pro funkci jedné proměnné platí obpodobné tvrzení i pro Taylorův polynom vyššího řádu. Např. $T_4(x) = 1 - x^4$ má ostré lokální maximum v bodě $x_0 = 0$ a odtud plyne totéž pro funkci f splňující

  $$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = 4! = 24$$

Funkce více proměnných – heslovitě pro dvě proměnné

- Graf funkce f s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^2$
$$\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in D, z = f(x,y)\}$$

- Vrstevnice/hladiny/izokřivky s hodnotou C jsou množiny
$$\{[x,y] \in D : f(x,y) = C\}$$
Například vrstevnice funkce $f(x,y) = x + y$ mají rovnice $x + y = C$ a jsou to navzájem rovnoběžné přímky.

- Parciální derivace funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$ podle proměnné x
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
podle proměnné y
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$
Parciální derivace značíme
$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \textbf{případně}\ f'_x,\ f'_y$$
Chceme-li vyznačit bod, ve kterém derivace počítáme, použijeme značení
$$\frac{\partial f}{\partial x}(A),\ \frac{\partial f}{\partial y}(A),\ f'_x(A),\ f'_y(A)$$
Všimněte si podobnosti s derivací funkce jedné proměnné a toho, že druhá proměnná nabývá v čitateli stejné hodnoty.

  Výpočet parciálních derivací ukážeme na příkladě funkce f
$$f(x,y) = (3xy - 5y^2)^3 \tag{1}$$
Derivace vnitřní funkce $3xy - 5y^2$ podle x je $3y$, protože y je konstantní. Proto je derivace f podle x
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(3xy - 5y^2)^2 \cdot 3y$$
Podobně derivace f podle proměnné y je
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(3xy - 5y^2)^2 \cdot (3x - 10y)$$

- Gradient funkce f v bodě $A = (x_0, y_0)$ je vektor, jehož složky jsou parciální derivace

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right)$$

Značíme jako výše $\operatorname{grad} f(A)$ nebo také $\nabla f(A)$ (čteme nabla ef).
Výše jsme spočítali parciální derivace funkce f z (1). Dosazením bodu $A = [2, 1]$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 9 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -12$$

a gradient funkce f v bodě A

$$\nabla f(A) = (9, -12)$$

- Rovnice tečné roviny funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

Srovnejte s případem funkce jedné proměnné. Liší se jen tím, že obsahuje dva členy s derivací.

Použití vzorce ukážeme na příkladě funkce (1). Použijeme výše vypočtené parciální derivace v bodě $A = [2, 1]$ a dále dosazením vypočteme $f(A) = 1$. Dosazením dostaneme rovnici tečné roviny funkce f v bodě A

$$z = 1 + 9(x - 2) - 12(y - 1)$$

- Taylorův polynom prvního stupně funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_1(x, y) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

Taylorův polynom funkce f z (1) v bodě A je

$$T_1(x, y) = 1 + 9(x - 2) - 12(y - 1)$$

- Vztah tečné roviny a Taylorova polynomu prvního stupně je analogický případu funkce jedné proměnné.

- Spojitost funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$:
  Okolí $U_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$ nahradíme kruhem se středem v bodě A a poloměrem δ

  $$U_\delta(A) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

  Pomocí normy
  $$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
  můžeme okolí zapsat

  $$U_\delta(A) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta\}$$

  Podmínku spojitosti f v bodě A pak zapíšeme některým ze způsobů

  1. $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) \in U_\varepsilon(f(x)))$$

  2. $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(\|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

- Limita funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$:
  značíme $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ a znamená to

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon)$$

  případně pomocí prstencového okolí

  $$P_\delta(A) = U_\delta(A) \setminus \{A\}$$

  zapíšeme definici limity

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in P_\delta(A))(|f(x, y) - A| < \varepsilon)$$

- Někdy se hodí odlišná definice limity (rozdíl jsme vyznačili červeně, D značí definiční obor funkce f)

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in P_\delta(A) \cap D)(|f(x, y) - A| < \varepsilon)$$

  Podobně se definuje limita vzhledem k množině $M \subseteq D$

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in P_\delta(A) \cap M)(|f(x, y) - A| < \varepsilon)$$

- Aproximační vlastnosti Taylorova polynomu prvního stupně

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f(A+h)-T_1(A+h)}{\|h\|}=0$$

Důležitá poznámka: pro funkci jedné proměnné tato dobrá aproximační vlastnost plyne z existence derivace. Pro funkci dvou proměnných je to jinak. Ukážeme příklady funkcí, které mají parciální derivace, ale Taylorův polynom tuto dobrou aproximační vlastnost nemá.

- Derivace vyšších řádů vysvětlíme na příkladu: pro

$$f(x,y)=(3xy-5y^2)^3$$

je (výpočet viz výše, zde po malé úpravě)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=9y(3xy-5y^2)^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=3(3x-10y)(3xy-5y^2)^2$$

Jejich dalším derivováním (a po malé úpravě) dostaneme druhou derivaci podle x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=54y^2(3xy-5y^2)$$

druhou derivaci podle y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-30(3xy-5y^2)^2+6(3xy-5y^2)(3x-10y)^2$$

Dále spočítáme tzv. smíšené derivace:
derivaci podle x zderivujeme podle y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=9(3xy-5y^2)^2+18y(3xy-5y^2)(3x-10y)$$

a derivaci podle y zderivujeme podle x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=9(3xy-5y^2)^2+3(3x-10y)(3xy-5y^2)6y$$

Po drobné úpravě lze nahlédnout, že smíšené derivace vyjdou stejně. To není náhoda. Pro „slušně vychovanou funkci“ (a polynomy slušně vychované jsou) se smíšené derivace rovnají. Později uvedeme příklad funkce, která takto slušně vychovaná není.

- Taylorův polynom slušně vychované funkce f v bodě $A = (x_0, y_0)$ stupně dva

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y-y_0)^2\right)$$

Maticově lze zapsat

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Matici H nazýváme Hessovou maticí funkce f v bodě A.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

Použití vzorce ukážeme na příkladě funkce (1). Do výše vypočtených parciálních derivací dosadíme bod $A = [2,1]$ a zvýsledků sestavíme Hessovu matici

$$H = \begin{pmatrix} 54 & -63 \\ -63 & 66 \end{pmatrix}$$

Použijeme výše vypočtené parciální derivace v bodě $A = [2,1]$ a dále dosazením vypočteme $f(A) = 27$. Dosazením dostaneme rovnici tečné roviny funkce f v bodě A

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}(x-2, y-1)\begin{pmatrix} 54 & -63 \\ -63 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Po dosazení za T_1 a vynásobení matic dostaneme

$$T_2(x,y) = 1+9(x-2)-12(y-1)+27(x-2)^2-63(x-2)(y-1)+33(y-1)^2$$

- Pozitivně/negativně definitní matice:
Matici M řádu 2×2 nazveme pozitivně definitní, pokud pro všechny nenulové vektory $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ platí

$$v^T M v > 0$$

podobně nazveme M negativně defitní, pokud pro $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ platí

$$v^T M v < 0$$

Srovnejte s případem funkce jedné proměnné: členu $f''(x_0)(x - x_0)^2$ v Taylorově polynomu odpovídá člen $(x - x_0, y - y_0)H(x - x_0, y - y_0)^T$. Pozitivní/negativní definitnost Hessovy matice pak odpovídá kladnosti/zápornosti druhé derivace $f''(x_0)$.

- Extrémy Taylorova polynomu druhého stupně:
  T_2 má v bodě A ostrý lokální extrém v případě, že grad $f(A) = (0,0)$ a Hessova matice v bodě A je pozitivně definitní (T_2 nabývá v bodě A ostrého lokálního minima) nebo negativně definitní (pak T_2 nabývá v bodě A ostrého lokálního maxima).

- Lokální extrém, derivace, Taylorův polynom druhého stupně
  Analogicky s případem funkce jedné proměnné z existence ostrého lokálního extrému Taylorova polynomu druhého stupně plyne jeho existence i pro funkci.
  Pro polynomy vyššího stupně ale analogické tvrzení neplatí, protipříklad

  $$f(x,y) = (x^2 - y)^2 + y^4 - 2x^8$$

  Zde je $T_4(x,y) = (x^2 - y)^2 + y^4$ s minimem v bodě $A = (0,0)$, ale na parabole $y = x^2$ je $f(x,x^2) = -x^8 < f(0,0)$.