

Okruhy k ústní zkoušce z AN3

20. prosince 2023

- **Funkce dvou proměnných:** graf, vrstevnice, příklady.
- **Parciální derivace:** definice, geometrický význam (směrnice tečny k řezu grafu rovinou, přírůstek funkce na tečné rovině), gradient funkce v bodě, jeho poloha vzhledem k vrstevnici.
- **Derivace podle vektoru:** definice, souvislost s gradientem, ilustrace na papírovém modelu; zdůvodnění polohy gradientu vzhledem k vrstevnici.
- **Spojitosť a limita funkce dvou proměnných:** definice pojmů; limity po přímkách, vztah k limitě, příklad funkce, která má limity po přímkách, ale nemá dvojnou limitu ($x^2y/(x^4 + y^2)$).
- **Totální diferenciál:** definice, aproximační vlastnosti, vysvětlení na analogii s funkcí jedné proměnné. Vysvětlení příkladu o nepřímém měření strany trojúhelníku s odhadem chyby (2.22 z textu prof. Zajíčka). Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu (spojitosť derivací).
- **Derivace vyššího řádu:** záměnnost smíšených derivací, postačující podmínka záměnnosti; příklad nezáměnnosti smíšených derivací ($xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$).
- **Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce dvou proměnných:** definice, rovnice tečné roviny, Hessova matice, pozitivně/negativně definitní/indefinitní matice (definice pojmů), vzájemná poloha grafů Taylorova polynomu prvního a druhého stupně.
- **Extrémy funkce dvou proměnných:** stacionární bod, geometrický význam (poloha tečné roviny), klasifikace (lokální maximum/minimum, sedlový bod), souvislost s Taylorovým polynomem druhého stupně a s Hessovou maticí.
- **Vázané extrémy:** definice, metoda lagrangeových multiplikátorů.
- **Obsah a objem:** přibližný výpočet obsahu rovinného obrazce pomocí milimetrového papíru, definice a vlastnosti obsahu; definice Jordanovy míry, Caratheodoryova podmínka Jordanovské měřitelnosti i s důkazem (odvozením); příklad neměřitelné množiny; pokrytí nekonečně mnoha intervaly (definice vnější míry), vnější míra množiny racionálních čísel.

- **Dvojné integrály:** dvojný a dvojnásobný integrál, Fubiniova věta; transformace integrálu do polárních souřadnic, výpočet elementárního objemu pomocí elementární geometrie a pomocí Jakobiánu.
- **Aplikace dvojných integrálů:** výpočet obsahu, objemu, polohy těžiště. Výpočet těžiště půlkruhu, výpočet objemu Vivianova okna.
- **Posloupnosti a řady funkcí:** bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí. Věta o stejnoměrné konvergenci a spojitosti i s důkazem, souvislost s výměnou pořadí limit. Mocninné řady, lemmata o oboru konvergence mocninné řady i s důkazy, věta o poloměru konvergence i s důkazem. Derivace řady člen po členu, souvislost s výměnou pořadí limit. Věta o derivaci mocninné řady člen po členu, použití na příkladech – součet řady $\sum kx^k$, $\sum k^2x^k$.
- **Taylorova řada:** definice, Taylorovy řady funkcí \sin , \cos , \exp a jejich součet i s důkazem. Taylorova řada funkce $\exp(-1/x^2)$ (respektive jejího spojitého rozšíření) v nule a její součet.
- **Metrické prostory:** definice metrického prostoru, příklady; vztah bodu a množiny – vnitřní, hraniční a hromadný bod množiny; otevřené, uzavřené, omezené, prekompaktní, kompaktní množiny; posloupnosti v metrických prostorech, konvergentní a Cauchyovská posloupnost, definice úplného metrického prostoru, ilustrace na příkladech racionálních a reálných čísel s euklidovskou metrikou.