Vázané extrémy funkce dvou proměnných

Motivační úloha.
Hledáme poměr výšky a průměru plechovky válcového tvaru tak, aby měla objem $V = 20l$ a cena materiálu byla co nejmenší. Přitom materiál použitý na podstavy je dvakrát dražší než materiál na plášť.

Jedno možné řešení je ze vztahu $V = \pi r^2 h$ vyjádřit jednu z proměnných, dosadit do vztahu pro cenu

$$c = 4\pi r^2 + 2\pi r h$$

a hledat minimum na intervalu $(0, +\infty)$.

Druhé možné řešení je v rovině zakreslit křivku o rovnici $V = \pi r^2 h$, kde na osy vynášíme proměnné r, h a kreslit vrstevnice funkce

$$c(r, h) = 4\pi r^2 + 2\pi r h$$

a hledat mezi nimi tu, která odpovídá minimální funkční hodnotě.

Podmínku $V = \pi r^2 h$ nazýváme *vazbou* a úlohu nazýváme úlohou na *extrém funkce c vázaný na množinu $M = \{[r, h] \in \mathbb{R}^2 : \pi r^2 h = V\}$* nebo jen stručně *vázaný extrém* (je-li z kontextu jasná vazba i funkce).

Motivační úloha 2.
Na přímce o rovnici $ax + by + c = 0$ nalezněte bod nejbližší počátku soustavy souřadné.

Definice: Bod $A \in \mathbb{R}^2$ nazveme *lokálním minimem funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *vázaným na množinu* $M \subset \mathbb{R}^2$, pokud

$$(\exists \delta > 0)(\forall B \in U_\delta(A) \cap M)(f(B) \geq f(A))$$

Poznámka: Množina M je zpravidla zadaná rovnicí $g(x, y) = 0$. Funkci g nazýváme *vazbou* nebo *vazbovou funkcí*. Množinu pak pomocí vazby zapíšeme

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} \tag{1}$$

Metodu použitou v motivačních příkladech zformulujeme ve větě.
Věta (nutná podmínka pro existenci vázaného extrému).
Nechť $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je vazba, množina M je zadaná (1), $A \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Nechť mají f, g v bodě $A \in M$ spojité parciální derivace a nechť $\nabla g(A) \neq (0, 0)$.
Nechť má $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě A vázaný extrém.
Pak

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R})(\nabla f(A) = \lambda \nabla g(A))$$