Obsah rovinných obrazců od 5. třídy základní školy k matematické analýze na škole vysoké

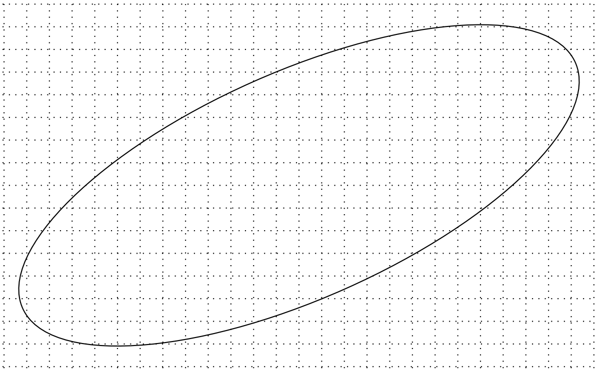
Martina Šimůnková

Katedra matematiky, FP TUL

27. listopadu 2023

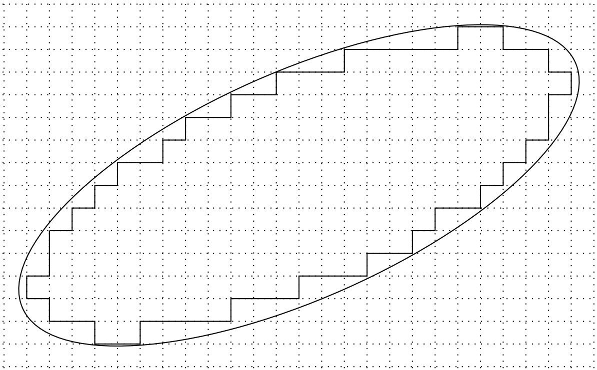
Obsah na milimetrovém papíře

Na obrázku je elipsa na čtvercové síti. Síť nám umožní odhadnout zdola shora obsah elipsy tím, že nahradíme elipsu čtverečky, které leží celé alespoň částečně uvnitř elipsy.



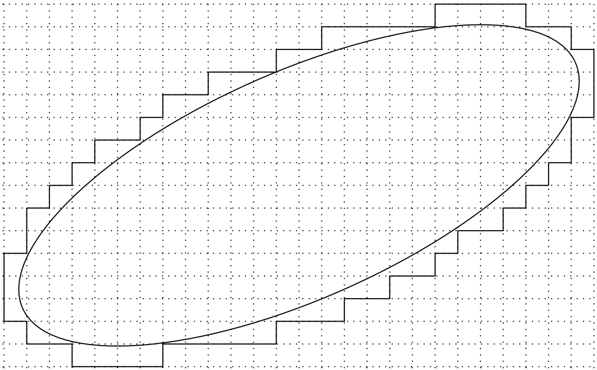
Obsah na milimetrovém papíře

Na obrázku je elipsa na čtvercové síti. Síť nám umožní odhadnout zdola shora obsah elipsy tím, že nahradíme elipsu čtverečky, které leží celé alespoň částečně uvnitř elipsy.



Obsah na milimetrovém papíře

Na obrázku je elipsa na čtvercové síti. Síť nám umožní odhadnout zdola shora obsah elipsy tím, že nahradíme elipsu čtverečky, které leží celé alespoň částečně uvnitř elipsy.



Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů $(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí $(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je $O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů $(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí $(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je $O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů $(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí $(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je $O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem
$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů
$(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí
$(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je
$O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem
$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů
$(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí
$(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je
$O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů $(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí $(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je $O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Definice a vlastnosti obsahu

Definice. Obsah je zobrazení, které množině $M \subset \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $O(M) \in [0, \infty)$ a které splňuje

1. Obsah obdélníku o stranách h, k je dán vzorcem $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall h, k \in [0, \infty))(O([a, a+h) \times [b, b+k)) = hk)$
2. Je aditivní – obsah sjednocení disjunktních množin M_1, M_2 je roven součtu jejich obsahů $(\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^2, M_1 \cap M_2 = \emptyset)(O(M_1 \cup M_2) = O(M_1) + O(M_2))$
3. Obsah je monotonní funkcí $(\forall M, N \in \mathbb{R}^2)(M \subset N \Rightarrow O(M) \leq O(N))$

Poznámka. Vlastnost 3 plyne z vlastnosti 2 a nezápornosti obsahu: zvolme $M_1 = M$, $M_2 = N \setminus M$, pak je $O(N) = O(M \cup (N \setminus M)) = O(M) + O(N \setminus M) \geq O(M)$.

Jordanova míra

Definice. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$. *Dvourozměrným intervalem* nazveme množinu $I = [a, b) \times [c, d)$. Číslo $(b-a)(d-c)$ nazveme obsahem intervalu I a budeme značit $O(I)$.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$. *Vnitřní Jordanovou mírou množiny M* nazýváme číslo

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou po dvou disjunktní intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \subset M \right\}$$

Vnější Jordanovou mírou množiny M nazýváme číslo

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \supset M \right\}$$

Poznámka. Množina M má konečnou vnější Jordanovu míru, právě když je omezená.

Jordanova míra

Definice. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$. *Dvourozměrným intervalem* nazveme množinu $I = [a, b) \times [c, d)$. Číslo $(b - a)(d - c)$ nazveme obsahem intervalu I a budeme značit $O(I)$.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$. *Vnitřní Jordanovou mírou množiny M* nazýváme číslo

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou po dvou disjunktní intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \subset M \right\}$$

Vnější Jordanovou mírou množiny M nazýváme číslo

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \supset M \right\}$$

Poznámka. Množina M má konečnou vnější Jordanovu míru, právě když je omezená.

Jordanova míra

Definice. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \le b$, $c \le d$. *Dvourozměrným intervalem* nazveme množinu $I = [a, b) \times [c, d)$. Číslo $(b-a)(d-c)$ nazveme obsahem intervalu I a budeme značit $O(I)$.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$. *Vnitřní Jordanovou mírou množiny M* nazýváme číslo

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou po dvou disjunktní intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \subset M\right\}$$

Vnější Jordanovou mírou množiny M nazýváme číslo

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \supset M\right\}$$

Poznámka. Množina M má konečnou vnější Jordanovu míru, právě když je omezená.

Jordanova míra

Definice. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$. *Dvourozměrným intervalem* nazveme množinu $I = [a, b) \times [c, d)$. Číslo $(b-a)(d-c)$ nazveme obsahem intervalu I a budeme značit $O(I)$.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$. *Vnitřní Jordanovou mírou množiny M* nazýváme číslo

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou po dvou disjunktní intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \subset M \right\}$$

Vnější Jordanovou mírou množiny M nazýváme číslo

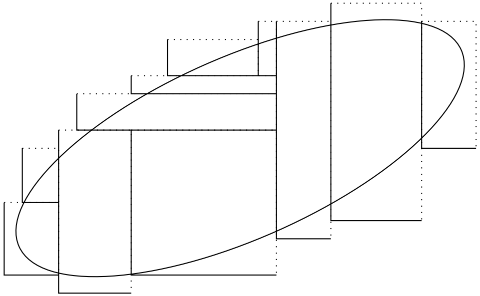
$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{n} I_k \supset M \right\}$$

Poznámka. Množina M má konečnou vnější Jordanovu míru, právě když je omezená.

Jordanova míra a milimetrový papír

Při konstrukci vnější Jordanovy míry používáme obdélníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami.

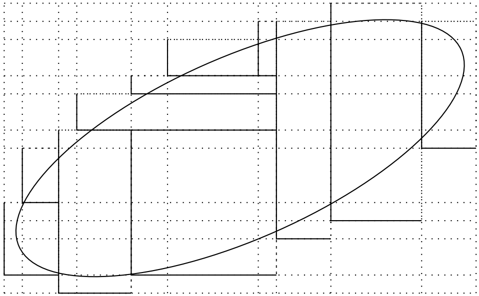
Z konečné množiny takových obdélníků vytvoříme síť určenou vrcholy obdélníků. Síť pak obdélníky rozloží na několik menších obdélníků.



Jordanova míra a milimetrový papír

Při konstrukci vnější Jordanovy míry používáme obdélníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami.

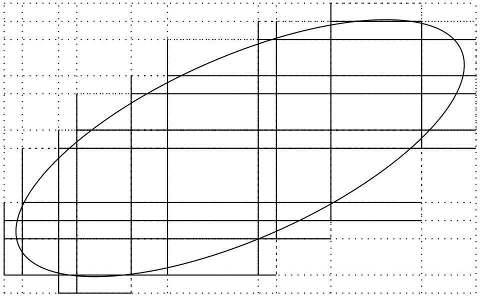
Z konečné množiny takových obdélníků vytvoříme síť určenou vrcholy obdélníků. Síť pak obdélníky rozloží na několik menších obdélníků.



Jordanova míra a milimetrový papír

Při konstrukci vnější Jordanovy míry používáme obdélníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami.

Z konečné množiny takových obdélníků vytvoříme síť určenou vrcholy obdélníků. Síť pak obdélníky rozloží na několik menších obdélníků.



Jordanovská měřitelnost

Definice. Množinu M nazveme *Jordanovsky měřitelnou*, pokud se její vnitřní a vnější Jordanovy míry rovnají a jsou konečné. Tuto společnou hodnotu budeme nazývat *Jordanovou mírou množiny M*.

Příklad Jordanovsky neměřitelné množiny. Množina $A \times A$, kde $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ má vnitřní Jordanovu míru rovnu nule, vnější rovnu jedné a tedy není Jordanovsky měřitelná.

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější a jm_* vnitřní Jordanovu míru. Pak platí

$$jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

Důkaz na dalším slajdu.

Jordanovská měřitelnost

Definice. Množinu M nazveme *Jordanovsky měřitelnou*, pokud se její vnitřní a vnější Jordanovy míry rovnají a jsou konečné. Tuto společnou hodnotu budeme nazývat *Jordanovou mírou množiny M*.

Příklad Jordanovsky neměřitelné množiny. Množina $A \times A$, kde $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ má vnitřní Jordanovu míru rovnu nule, vnější rovnu jedné a tedy není Jordanovsky měřitelná.

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější a jm_* vnitřní Jordanovu míru. Pak platí

$$jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

Důkaz na dalším slajdu.

Jordanovská měřitelnost

Definice. Množinu M nazveme *Jordanovsky měřitelnou*, pokud se její vnitřní a vnější Jordanovy míry rovnají a jsou konečné. Tuto společnou hodnotu budeme nazývat *Jordanovou mírou množiny* M.

Příklad Jordanovsky neměřitelné množiny. Množina $A \times A$, kde $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ má vnitřní Jordanovu míru rovnu nule, vnější rovnu jedné a tedy není Jordanovsky měřitelná.

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější a jm_* vnitřní Jordanovu míru. Pak platí

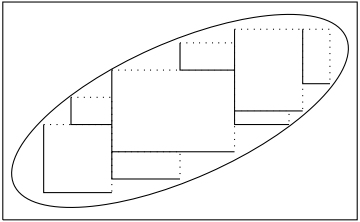
$$jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

Důkaz na dalším slajdu.

Důkaz lemmatu

Důkaz. Nechť $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A$ je systém po dvou disjunktních intervalů.

Z krajních bodů intervalů I_k vytvoříme síť a síť vytvoří intervaly $\{J_k\}_{k=1}^m$ doplňující disjunktní sjednocení $\bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k = I$



Odtud plyne

$$\sum_{k=1}^n O(I_k) = O(I) - \sum_{k=1}^m O(J_k),$$

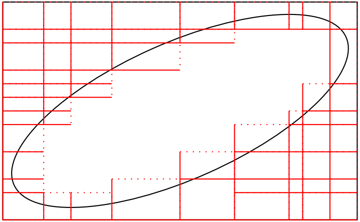
$$\sup\{\sum_{k=1}^n O(I_k)\} = O(I) - \inf\{\sum_{k=1}^m O(J_k)\}$$

a tedy $\quad jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$

Důkaz lemmatu

Důkaz. Nechť $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A$ je systém po dvou disjunktních intervalů.

Z krajních bodů intervalů I_k vytvoříme síť a síť vytvoří intervaly $\{J_k\}_{k=1}^m$ doplňující disjunktní sjednocení $\bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k = I$



Odtud plyne

$$\sum_{k=1}^n O(I_k) = O(I) - \sum_{k=1}^m O(J_k),$$

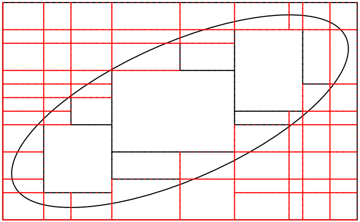
$$\sup\{\sum_{k=1}^n O(I_k)\} = O(I) - \inf\{\sum_{k=1}^m O(J_k)\}$$

a tedy $jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$

Důkaz lemmatu

Důkaz. Nechť $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A$ je systém po dvou disjunktních intervalů.

Z krajních bodů intervalů I_k vytvoříme síť a síť vytvoří intervaly $\{J_k\}_{k=1}^m$ doplňující disjunktní sjednocení $\bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k = I$

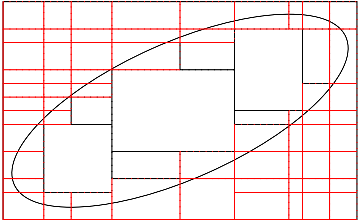


Odtud plyne
$$\sum_{k=1}^n O(I_k) = O(I) - \sum_{k=1}^m O(J_k),$$
$$\sup\{\sum_{k=1}^n O(I_k)\} = O(I) - \inf\{\sum_{k=1}^m O(J_k)\}$$
a tedy $\quad jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$

Důkaz lemmatu

Důkaz. Nechť $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A$ je systém po dvou disjunktních intervalů.

Z krajních bodů intervalů I_k vytvoříme síť a síť vytvoří intervaly $\{J_k\}_{k=1}^m$ doplňující disjunktní sjednocení $\bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k = I$



Odtud plyne

$$\sum_{k=1}^n O(I_k) = O(I) - \sum_{k=1}^m O(J_k),$$

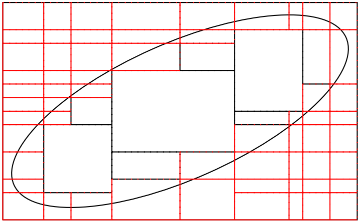
$$\sup\{\sum_{k=1}^n O(I_k)\} = O(I) - \inf\{\sum_{k=1}^m O(J_k)\}$$

a tedy $jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$

Důkaz lemmatu

Důkaz. Nechť $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A$ je systém po dvou disjunktních intervalů.

Z krajních bodů intervalů I_k vytvoříme síť a síť vytvoří intervaly $\{J_k\}_{k=1}^m$ doplňující disjunktní sjednocení $\bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k = I$



Odtud plyne

$$\sum_{k=1}^n O(I_k) = O(I) - \sum_{k=1}^m O(J_k),$$

$$\sup\{\sum_{k=1}^n O(I_k)\} = O(I) - \inf\{\sum_{k=1}^m O(J_k)\}$$

a tedy $\quad jm_*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$

Caratheodoryova podmínka

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější Jordanovu míru. Množina A je Jordanovsky měřitelná právě když splňuje *Caratheodoryovu podmínku*

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Důkaz. Jordanovskou měřitelnost jsme definovali vztahem

$$jm_*(A) = jm^*(A)$$

Dosazením do rovnosti z předchozího lemmatu dostaneme

$$jm^*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

a po úpravě dostaneme Caratheodoryovu podmínku.

Poznámka. Pokud není množina A Jordanovsky měřitelná, pak z $jm_*(A) < jm^*(A)$ plyne subaditivita $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) > O(I)$

Caratheodoryova podmínka

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější Jordanovu míru. Množina A je Jordanovsky měřitelná právě když splňuje *Caratheodoryovu podmínku*

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Důkaz. Jordanovskou měřitelnost jsme definovali vztahem

$$jm_*(A) = jm^*(A)$$

Dosazením do rovnosti z předchozího lemmatu dostaneme

$$jm^*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

a po úpravě dostaneme Caratheodoryovu podmínku.

Poznámka. Pokud není množina A Jordanovsky měřitelná, pak z $jm_*(A) < jm^*(A)$ plyne subaditivita $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) > O(I)$

Caratheodoryova podmínka

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější Jordanovu míru. Množina A je Jordanovsky měřitelná právě když splňuje *Caratheodoryovu podmínku*

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Důkaz. Jordanovskou měřitelnost jsme definovali vztahem

$$jm_*(A) = jm^*(A)$$

Dosazením do rovnosti z předchozího lemmatu dostaneme

$$jm^*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

a po úpravě dostaneme Caratheodoryovu podmínku.

Poznámka. Pokud není množina A Jordanovsky měřitelná, pak z $jm_*(A) < jm^*(A)$ plyne subaditivita $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) > O(I)$

Caratheodoryova podmínka

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější Jordanovu míru. Množina A je Jordanovsky měřitelná právě když splňuje *Caratheodoryovu podmínku*

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Důkaz. Jordanovskou měřitelnost jsme definovali vztahem

$$jm_*(A) = jm^*(A)$$

Dosazením do rovnosti z předchozího lemmatu dostaneme

$$jm^*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

a po úpravě dostaneme Caratheodoryovu podmínku.

Poznámka. Pokud není množina A Jordanovsky měřitelná, pak z $jm_*(A) < jm^*(A)$ plyne subaditivita $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) > O(I)$

Caratheodoryova podmínka

Lemma. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $A \subset I$. Označme jm^* vnější Jordanovu míru. Množina A je Jordanovsky měřitelná právě když splňuje *Caratheodoryovu podmínku*

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Důkaz. Jordanovskou měřitelnost jsme definovali vztahem

$$jm_*(A) = jm^*(A)$$

Dosazením do rovnosti z předchozího lemmatu dostaneme

$$jm^*(A) = O(I) - jm^*(I \setminus A)$$

a po úpravě dostaneme Caratheodoryovu podmínku.

Poznámka. Pokud není množina A Jordanovsky měřitelná, pak z $jm_*(A) < jm^*(A)$ plyne subaditivita $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) > O(I)$

Systém Jordanovsky měřitelných množin

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A, B \in S)(A \cup B \in S)$

Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je omezený interval. Množina Jordanovsky měřitelných podmnožin intervalu I tvoří množinovou algebru.

Důkaz.

1. $\emptyset = [a, a) \times [b, b)$
2. Plyne z Caratheodoryovy podmínky $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$
3. K důkazu aditivity nejdříve dokážeme lemma.

Systém Jordanovsky měřitelných množin

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A, B \in S)(A \cup B \in S)$

Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je omezený interval. Množina Jordanovsky měřitelných podmnožin intervalu I tvoří množinovou algebru.

Důkaz.

1. $\emptyset = [a, a) \times [b, b)$
2. Plyne z Caratheodoryovy podmínky $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$
3. K důkazu aditivity nejdříve dokážeme lemma.

Systém Jordanovsky měřitelných množin

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A, B \in S)(A \cup B \in S)$

Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je omezený interval. Množina Jordanovsky měřitelných podmnožin intervalu I tvoří množinovou algebru.

Důkaz.

1. $\emptyset = [a, a) \times [b, b)$
2. Plyne z Caratheodoryovy podmínky $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$
3. K důkazu aditivity nejdříve dokážeme lemma.

Systém Jordanovsky měřitelných množin

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A, B \in S)(A \cup B \in S)$

Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je omezený interval. Množina Jordanovsky měřitelných podmnožin intervalu I tvoří množinovou algebru.

Důkaz.

1. $\emptyset = [a, a) \times [b, b)$
2. Plyne z Caratheodoryovy podmínky
   $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$
3. K důkazu aditivity nejdříve dokážeme lemma.

Systém Jordanovsky měřitelných množin

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A, B \in S)(A \cup B \in S)$

Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je omezený interval. Množina Jordanovsky měřitelných podmnožin intervalu I tvoří množinovou algebru.

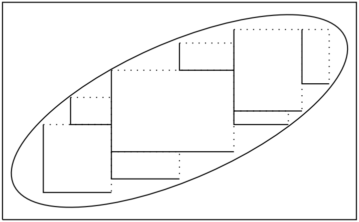
Důkaz.

1. $\emptyset = [a, a) \times [b, b)$
2. Plyne z Caratheodoryovy podmínky $jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$
3. K důkazu aditivity nejdříve dokážeme lemma.

Lemma k důkazu věty o algebře Jordanovsky měřitelných množin

Lemma. Omezená množina $A \subset I$ je Jordanovsky měřitelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje systém po dvou disjunktních intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\{J_k\}_{k=1}^m$, že

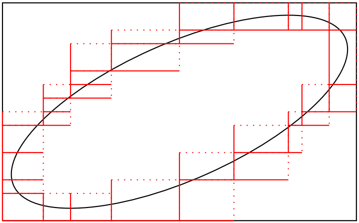
$$\cup_{k=1}^n I_k \subset A \subset (\cup_{k=1}^n I_k) \cup (\cup_{k=1}^m J_k), \qquad \sum_{k=1}^m O(J_k) < \varepsilon$$



Lemma k důkazu věty o algebře Jordanovsky měřitelných množin

Lemma. Omezená množina $A \subset I$ je Jordanovsky měřitelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje systém po dvou disjunktních intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\{J_k\}_{k=1}^m$, že

$$\cup_{k=1}^n I_k \subset A \subset (\cup_{k=1}^n I_k) \cup (\cup_{k=1}^m J_k), \qquad \sum_{k=1}^m O(J_k) < \varepsilon$$



Důkaz lemmatu

Důkaz. Označme $jm_*(A)$ vnitřní míru A, $jm^*(A)$ vnější míru A.

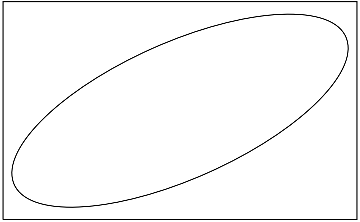
Zvolme $\{I_k\}_{k=1}^n$ tak, aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) > jm_*(A) - \varepsilon/2$

a $\{J_k\}_{k=1}^m$, tak aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) + \varepsilon/2$.

Pak je $\sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) - jm_*(A) + \varepsilon$, (*)

Dále je $\sum_{k=1}^n O(I_k) \leq jm_*(A)$,
$\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A)$
a odtud plyne $\sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A) - jm_*(A)$. (**)

Tvrzení lemmatu plyne ze vztahů (*), (**).



Důkaz lemmatu

Důkaz. Označme $jm_*(A)$ vnitřní míru A, $jm^*(A)$ vnější míru A.

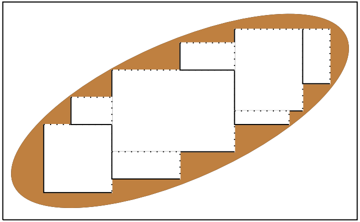
Zvolme $\{I_k\}_{k=1}^n$ tak, aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) > jm_*(A) - \varepsilon/2$

a $\{J_k\}_{k=1}^m$, tak aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) + \varepsilon/2$.

Pak je $\sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) - jm_*(A) + \varepsilon, \quad (*)$

Dále je $\sum_{k=1}^n O(I_k) \leq jm_*(A)$,
$\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A)$
a odtud plyne $\sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A) - jm_*(A). \quad (**)$

Tvrzení lemmatu plyne ze vztahů (*), (**).



Důkaz lemmatu

Důkaz. Označme $jm_*(A)$ vnitřní míru A, $jm^*(A)$ vnější míru A.

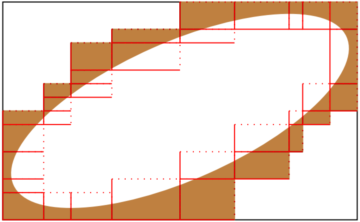
Zvolme $\{I_k\}_{k=1}^n$ tak, aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) > jm_*(A) - \varepsilon/2$

a $\{J_k\}_{k=1}^m$, tak aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) + \varepsilon/2$.

Pak je $\sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) - jm_*(A) + \varepsilon$, (*)

Dále je $\sum_{k=1}^n O(I_k) \leq jm_*(A)$,
$\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A)$
a odtud plyne $\sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A) - jm_*(A)$. (**)

Tvrzení lemmatu plyne ze vztahů (*), (**).



Důkaz lemmatu

Důkaz. Označme $jm_*(A)$ vnitřní míru A, $jm^*(A)$ vnější míru A.

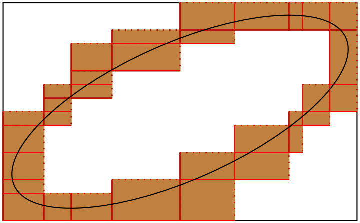
Zvolme $\{I_k\}_{k=1}^n$ tak, aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) > jm_*(A) - \varepsilon/2$

a $\{J_k\}_{k=1}^m$, tak aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) + \varepsilon/2$.

Pak je $\sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) - jm_*(A) + \varepsilon$, (*)

Dále je $\sum_{k=1}^n O(I_k) \leq jm_*(A)$,
$\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A)$
a odtud plyne $\sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A) - jm_*(A)$. (**)

Tvrzení lemmatu plyne ze vztahů (*), (**).



Důkaz lemmatu

Důkaz. Označme $jm_*(A)$ vnitřní míru A, $jm^*(A)$ vnější míru A.

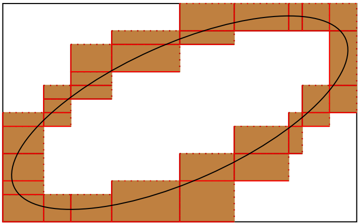
Zvolme $\{I_k\}_{k=1}^n$ tak, aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) > jm_*(A) - \varepsilon/2$

a $\{J_k\}_{k=1}^m$, tak aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) + \varepsilon/2$.

Pak je $\sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) - jm_*(A) + \varepsilon$, (*)

Dále je $\sum_{k=1}^n O(I_k) \le jm_*(A)$,
$\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) \ge jm^*(A)$
a odtud plyne $\sum_{k=1}^m O(J_k) \ge jm^*(A) - jm_*(A)$. (**)

Tvrzení lemmatu plyne ze vztahů (*), (**).



Důkaz lemmatu

Důkaz. Označme $jm_*(A)$ vnitřní míru A, $jm^*(A)$ vnější míru A.

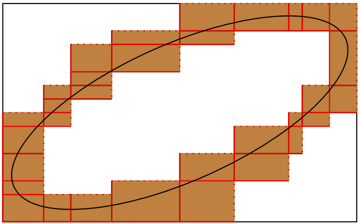
Zvolme $\{I_k\}_{k=1}^n$ tak, aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) > jm_*(A) - \varepsilon/2$

a $\{J_k\}_{k=1}^m$, tak aby $\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) + \varepsilon/2$.

Pak je $\sum_{k=1}^m O(J_k) < jm^*(A) - jm_*(A) + \varepsilon$, (*)

Dále je $\sum_{k=1}^n O(I_k) \leq jm_*(A)$,
$\sum_{k=1}^n O(I_k) + \sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A)$
a odtud plyne $\sum_{k=1}^m O(J_k) \geq jm^*(A) - jm_*(A)$. (**)

Tvrzení lemmatu plyne ze vztahů (*), (**).



Důkaz věty o algebře Jordanovsky měřitelných množin – pokračování

Uvažujme nyní Jordanovsky měřitelné množiny A, B a systémy intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\{J_k\}_{k=1}^m$, $\{K_k\}_{k=1}^o$, $\{L_k\}_{k=1}^p$ splňující

$\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k$

$\bigcup_{k=1}^o K_k \subset B \subset \bigcup_{k=1}^o K_k \cup \bigcup_{k=1}^p L_k$

$\sum_{k=1}^n O(J_k) < \varepsilon/2, \quad \sum_{k=1}^p O(L_k) < \varepsilon/2$

Udělejme sjednocení těchto systémů, intervaly rozdělme na části, tak aby po vyhození duplicit byly po dvou disjunktní. Dostaneme systém pro sjednocení, ze kterého plyne Jordanovská měřitelnost $A \cup B$.

Důkaz věty o algebře Jordanovsky měřitelných množin – pokračování

Uvažujme nyní Jordanovsky měřitelné množiny A, B a systémy intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\{J_k\}_{k=1}^m$, $\{K_k\}_{k=1}^o$, $\{L_k\}_{k=1}^p$ splňující

$\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k$

$\bigcup_{k=1}^o K_k \subset B \subset \bigcup_{k=1}^o K_k \cup \bigcup_{k=1}^p L_k$

$\sum_{k=1}^n O(J_k) < \varepsilon/2, \quad \sum_{k=1}^p O(L_k) < \varepsilon/2$

Udělejme sjednocení těchto systémů, intervaly rozdělme na části, tak aby po vyhození duplicit byly po dvou disjunktní. Dostaneme systém pro sjednocení, ze kterého plyne Jordanovská měřitelnost $A \cup B$.

Důkaz věty o algebře Jordanovsky měřitelných množin – pokračování

Uvažujme nyní Jordanovsky měřitelné množiny A, B a systémy intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\{J_k\}_{k=1}^m$, $\{K_k\}_{k=1}^o$, $\{L_k\}_{k=1}^p$ splňující

$\bigcup_{k=1}^n I_k \subset A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k=1}^m J_k$

$\bigcup_{k=1}^o K_k \subset B \subset \bigcup_{k=1}^o K_k \cup \bigcup_{k=1}^p L_k$

$\sum_{k=1}^n O(J_k) < \varepsilon/2, \quad \sum_{k=1}^p O(L_k) < \varepsilon/2$

Udělejme sjednocení těchto systémů, intervaly rozdělme na části, tak aby po vyhození duplicit byly po dvou disjunktní. Dostaneme systém pro sjednocení, ze kterého plyne Jordanovská měřitelnost $A \cup B$.

Další vlastnosti množinové algebry

1. Z de Morganových vzorců plyne

$$A, B \in S \Longrightarrow A \cap B \in S$$

$A \cap B = M \setminus ((M \setminus A) \cup (M \setminus B))$

2. Matematickou indukcí dokážeme, že v algebře leží i sjednocení/průnik konečného počtu množin

$$(\forall k \in \{1, \dots, n\})(A_k \in S) \Longrightarrow (\cup_{k=1}^{n} A_k \in S, \cap_{k=1}^{n} A_k \in S)$$

3. Pro nekonečně mnoho množin $A_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$ nemusí platit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$. Například všechny jednoprvkové množiny jsou Jordanovsky měřitelné, jejich sjednocením dostaneme spočetnou množinu, která být Jordanovsky měřitelná nemusí. Pro případ jednorozměrné míry uveďme $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (dvourozměrný případ je $A \times A$).

Další vlastnosti množinové algebry

1. Z de Morganových vzorců plyne

$$A, B \in S \Longrightarrow A \cap B \in S$$

$A \cap B = M \setminus ((M \setminus A) \cup (M \setminus B))$

2. Matematickou indukcí dokážeme, že v algebře leží i sjednocení/průnik konečného počtu množin

$$(\forall k \in \{1, \dots, n\})(A_k \in S) \Longrightarrow (\cup_{k=1}^{n} A_k \in S, \cap_{k=1}^{n} A_k \in S)$$

3. Pro nekonečně mnoho množin $A_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$ nemusí platit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$. Například všechny jednoprvkové množiny jsou Jordanovsky měřitelné, jejich sjednocením dostaneme spočetnou množinu, která být Jordanovsky měřitelná nemusí. Pro případ jednorozměrné míry uveďme $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (dvourozměrný případ je $A \times A$).

Další vlastnosti množinové algebry

1. Z de Morganových vzorců plyne

$$A, B \in S \Longrightarrow A \cap B \in S$$

   $A \cap B = M \setminus ((M \setminus A) \cup (M \setminus B))$

2. Matematickou indukcí dokážeme, že v algebře leží i sjednocení/průnik konečného počtu množin

$$(\forall k \in \{1, \dots, n\})(A_k \in S) \Longrightarrow (\cup_{k=1}^{n} A_k \in S, \cap_{k=1}^{n} A_k \in S)$$

3. Pro nekonečně mnoho množin $A_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$ nemusí platit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$. Například všechny jednoprvkové množiny jsou Jordanovsky měřitelné, jejich sjednocením dostaneme spočetnou množinu, která být Jordanovsky měřitelná nemusí. Pro případ jednorozměrné míry uveďme $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (dvourozměrný případ je $A \times A$).

Další vlastnosti množinové algebry

1. Z de Morganových vzorců plyne

$$A, B \in S \Longrightarrow A \cap B \in S$$

$A \cap B = M \setminus ((M \setminus A) \cup (M \setminus B))$

2. Matematickou indukcí dokážeme, že v algebře leží i sjednocení/průnik konečného počtu množin

$$(\forall k \in \{1, \dots, n\})(A_k \in S) \Longrightarrow (\cup_{k=1}^{n} A_k \in S, \cap_{k=1}^{n} A_k \in S)$$

3. Pro nekonečně mnoho množin $A_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$ nemusí platit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$. Například všechny jednoprvkové množiny jsou Jordanovsky měřitelné, jejich sjednocením dostaneme spočetnou množinu, která být Jordanovsky měřitelná nemusí. Pro případ jednorozměrné míry uveďme $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (dvourozměrný případ je $A \times A$).

Další vlastnosti množinové algebry

1. Z de Morganových vzorců plyne

$$A, B \in S \Longrightarrow A \cap B \in S$$

$A \cap B = M \setminus ((M \setminus A) \cup (M \setminus B))$

2. Matematickou indukcí dokážeme, že v algebře leží i sjednocení/průnik konečného počtu množin

$$(\forall k \in \{1, \dots, n\})(A_k \in S) \Longrightarrow (\cup_{k=1}^{n} A_k \in S, \cap_{k=1}^{n} A_k \in S)$$

3. Pro nekonečně mnoho množin $A_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$ nemusí platit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$. Například všechny jednoprvkové množiny jsou Jordanovsky měřitelné, jejich sjednocením dostaneme spočetnou množinu, která být Jordanovsky měřitelná nemusí. Pro případ jednorozměrné míry uveďme $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (dvourozměrný případ je $A \times A$).

Pokrytí nekonečně mnoha intervaly

Vnější Jordanova míra množiny $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ je rovna jedné – při pokrytí množiny B konečně mnoha intervaly pokryjeme celý čtverec, protože je množina B hustá v tomto čtverci.

Uvažujme pokrytí nekonečně mnoha intervaly. Zvolme $\varepsilon > 0$, využijeme, že B je spočetná množina a její body pokryjeme intervaly o obsahu $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$, $\dots \varepsilon/2^k$, $\dots$

Definice. *Vnější mírou množiny M* nazýváme číslo

$$m^*(M) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset M \right\}$$

Příklad. Pro množinu B definovanou výše je $m^*(B) = 0$.

Pokrytí nekonečně mnoha intervaly

Vnější Jordanova míra množiny $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ je rovna jedné – při pokrytí množiny B konečně mnoha intervaly pokryjeme celý čtverec, protože je množina B hustá v tomto čtverci.

Uvažujme pokrytí nekonečně mnoha intervaly. Zvolme $\varepsilon > 0$, využijeme, že B je spočetná množina a její body pokryjeme intervaly o obsahu $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$, $\dots \varepsilon/2^k$, $\dots$

Definice. *Vnější mírou množiny M* nazýváme číslo

$$m^*(M) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset M \right\}$$

Příklad. Pro množinu B definovanou výše je $m^*(B) = 0$.

Pokrytí nekonečně mnoha intervaly

Vnější Jordanova míra množiny $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ je rovna jedné – při pokrytí množiny B konečně mnoha intervaly pokryjeme celý čtverec, protože je množina B hustá v tomto čtverci.

Uvažujme pokrytí nekonečně mnoha intervaly. Zvolme $\varepsilon > 0$, využijeme, že B je spočetná množina a její body pokryjeme intervaly o obsahu $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$, $\dots \varepsilon/2^k$, $\dots$

Definice. *Vnější mírou množiny M* nazýváme číslo

$$m^*(M) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset M\right\}$$

Příklad. Pro množinu B definovanou výše je $m^*(B) = 0$.

Pokrytí nekonečně mnoha intervaly

Vnější Jordanova míra množiny $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ je rovna jedné – při pokrytí množiny B konečně mnoha intervaly pokryjeme celý čtverec, protože je množina B hustá v tomto čtverci.

Uvažujme pokrytí nekonečně mnoha intervaly. Zvolme $\varepsilon > 0$, využijeme, že B je spočetná množina a její body pokryjeme intervaly o obsahu $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$, $\ldots \varepsilon/2^k$, $\ldots$

Definice. *Vnější mírou množiny M* nazýváme číslo

$$m^*(M) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset M \right\}$$

Příklad. Pro množinu B definovanou výše je $m^*(B) = 0$.

Pokrytí nekonečně mnoha intervaly

Vnější Jordanova míra množiny $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ je rovna jedné – při pokrytí množiny B konečně mnoha intervaly pokryjeme celý čtverec, protože je množina B hustá v tomto čtverci.

Uvažujme pokrytí nekonečně mnoha intervaly. Zvolme $\varepsilon > 0$, využijeme, že B je spočetná množina a její body pokryjeme intervaly o obsahu $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$, $\dots \varepsilon/2^k$, $\dots$

Definice. *Vnější mírou množiny M* nazýváme číslo

$$m^*(M) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : I_k \text{ jsou intervaly, } \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset M\right\}$$

Příklad. Pro množinu B definovanou výše je $m^*(B) = 0$.

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.

Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.

Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0, 1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:

Otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná

Příklad otevřené množiny, která není Jordanovsky měřitelná.

Nechť $B = A \times A$, kde $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Seřaďme prvky B do posloupnosti a pro $x_k \in B$ nechť je $ok(x_k)$ *otevřený* kruh o obsahu $\varepsilon/2^k$ se středem v bodě x_k.

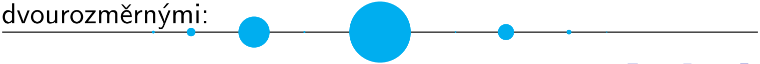
Uvažujme množinu

$$C = \bigcup_{x_k \in B} ok(x_k)$$

Pak je C otevřená množina.
Dále je $B \subset C$, a tedy vnější Jordanova míra $jm^*(C) \geq jm^*(B) = 1$.
Vnitřní míra C je nanejvýš rovna součtu měr $ok(x_k)$, tedy ε.

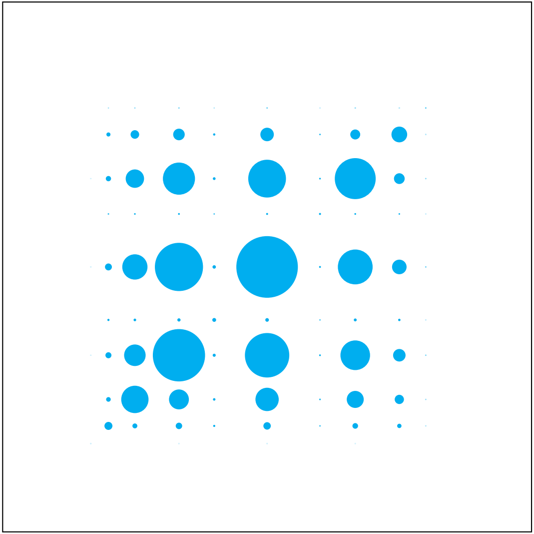
Závěr: C je otevřená množina, která není Jordanovsky měřitelná.

Ukážeme na jednorozměrném případě – úsečka znázorňuje interval $(0,1)$, racionální čísla pokrýváme okolími, pro lepší viditelnost dvourozměrnými:



„Lebesgueova sodovka“

Množina C pro pomalejší zmenšování okolí (stále tvoří geometrickou řadu). Vidět jsou jen okolí bodů se souřadnicemi $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5$, ostatní jsou příliš malá.



Limitní přechody, nekonečné součty, σ-algebra

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou σ-algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A_k \in S, k \in \mathbb{N})(\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S)$

Funkci $m : S \to [0, +\infty]$ nazýváme *mírou*, pokud platí

1. $m(\emptyset) = 0$
2. Pro libovolný systém po dvou disjunktních množin $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ platí
$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$
Tuto vlastnost nazýváme σ-aditivitou.

Poznámka. Položme $A_k = \emptyset$ pro $k > n$ a dostaneme podmínku pro konečný počet množin.

Limitní přechody, nekonečné součty, σ-algebra

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou σ-algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A_k \in S, k \in \mathbb{N})(\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S)$

Funkci $m : S \to [0, +\infty]$ nazýváme *mírou*, pokud platí

1. $m(\emptyset) = 0$
2. Pro libovolný systém po dvou disjunktních množin $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ platí
$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$
Tuto vlastnost nazýváme σ-aditivitou.

Poznámka. Položme $A_k = \emptyset$ pro $k > n$ a dostaneme podmínku pro konečný počet množin.

Limitní přechody, nekonečné součty, σ-algebra

Definice. Nechť M je množina, $S \subset 2^M$ systém jejích podmnožin. Dvojici (M, S) nazveme *množinovou σ-algebrou*, pokud platí

1. $\emptyset \in S$
2. $(\forall A \in S)(M \setminus A \in S)$
3. $(\forall A_k \in S, k \in \mathbb{N})(\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in S)$

Funkci $m : S \to [0, +\infty]$ nazýváme *mírou*, pokud platí

1. $m(\emptyset) = 0$
2. Pro libovolný systém po dvou disjunktních množin $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ platí
$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$
Tuto vlastnost nazýváme σ-aditivitou.

Poznámka. Položme $A_k = \emptyset$ pro $k > n$ a dostaneme podmínku pro konečný počet množin.

Lebesgueova míra

Definice. Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *Lebesgueovsky měřitelnou*, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) = O(I)$$

Poznámka. Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru. K důkazu bychom potřebovali sérii přednášek.

Poznámka. Všimněte si podobnosti s tvarem Caratheodoryovy podmínky pro Jordanovsky měřitelnou množinu

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Pro Jordanovsky měřitelnou množinu jsme předpokládali $A \subset I$, a pak je $A = A \cap I$.
Lebesgueovsky měřitelná množina nemusí být omezená, tedy nemusí existovat interval I, pro nějž platí $A \subset I$, a proto v podmínce musí být výraz $m^*(A \cap I)$ místo $m^*(A)$.

Lebesgueova míra

Definice. Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *Lebesgueovsky měřitelnou*, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) = O(I)$$

Poznámka. Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru. K důkazu bychom potřebovali sérii přednášek.

Poznámka. Všimněte si podobnosti s tvarem Caratheodoryovy podmínky pro Jordanovsky měřitelnou množinu

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Pro Jordanovsky měřitelnou množinu jsme předpokládali $A \subset I$, a pak je $A = A \cap I$.
Lebesgueovsky měřitelná množina nemusí být omezená, tedy nemusí existovat interval I, pro nějž platí $A \subset I$, a proto v podmínce musí být výraz $m^*(A \cap I)$ místo $m^*(A)$.

Lebesgueova míra

Definice. Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *Lebesgueovsky měřitelnou*, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) = O(I)$$

Poznámka. Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru. K důkazu bychom potřebovali sérii přednášek.

Poznámka. Všimněte si podobnosti s tvarem Caratheodoryovy podmínky pro Jordanovsky měřitelnou množinu

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Pro Jordanovsky měřitelnou množinu jsme předpokládali $A \subset I$, a pak je $A = A \cap I$.
Lebesgueovsky měřitelná množina nemusí být omezená, tedy nemusí existovat interval I, pro nějž platí $A \subset I$, a proto v podmínce musí být výraz $m^*(A \cap I)$ místo $m^*(A)$.

Lebesgueova míra

Definice. Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *Lebesgueovsky měřitelnou*, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) = O(I)$$

Poznámka. Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru. K důkazu bychom potřebovali sérii přednášek.

Poznámka. Všimněte si podobnosti s tvarem Caratheodoryovy podmínky pro Jordanovsky měřitelnou množinu

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Pro Jordanovsky měřitelnou množinu jsme předpokládali $A \subset I$, a pak je $A = A \cap I$.

Lebesgueovsky měřitelná množina nemusí být omezená, tedy nemusí existovat interval I, pro nějž platí $A \subset I$, a proto v podmínce musí být výraz $m^*(A \cap I)$ místo $m^*(A)$.

Lebesgueova míra

Definice. Množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *Lebesgueovsky měřitelnou*, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) = O(I)$$

Poznámka. Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru. K důkazu bychom potřebovali sérii přednášek.

Poznámka. Všimněte si podobnosti s tvarem Caratheodoryovy podmínky pro Jordanovsky měřitelnou množinu

$$jm^*(A) + jm^*(I \setminus A) = O(I)$$

Pro Jordanovsky měřitelnou množinu jsme předpokládali $A \subset I$, a pak je $A = A \cap I$.
Lebesgueovsky měřitelná množina nemusí být omezená, tedy nemusí existovat interval I, pro nějž platí $A \subset I$, a proto v podmínce musí být výraz $m^*(A \cap I)$ místo $m^*(A)$.

Měřitelnost otevřených množin

Ukážeme, že otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ je možné vyjádřit jako spočetné disjunktní sjednocení intervalů $G = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Odtud pak plyne Lebesgueovská měřitelnost otevřených množin.

Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$, nemusí být otevřená. Vytvoříme $A_\infty \subseteq A$:

$$V_0 = \{I = [a, a+1) \times [b, b+1) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A\}$$
$$A_0 = \bigcup_{I \in V_0} I$$

Další kroky

$$V_k = \{I = [a/2^k, (a+1)/2^k) \times [b/2^k, (b+1)/2^k) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A, I \cap A_{k-1} = \emptyset\}$$
$$A_k = A_{k-1} \cup \bigcup_{I \in V_k} I \quad \ldots \quad A_\infty = \bigcup A_k$$

Z konstrukce plyne $A_\infty \subseteq A$.

Měřitelnost otevřených množin

Ukážeme, že otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ je možné vyjádřit jako spočetné disjunktní sjednocení intervalů $G = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Odtud pak plyne Lebesgueovská měřitelnost otevřených množin.

Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$, nemusí být otevřená. Vytvoříme $A_\infty \subseteq A$:

$$V_0 = \{I = [a, a+1) \times [b, b+1) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A\}$$

$$A_0 = \bigcup_{I \in V_0} I$$

Další kroky

$$V_k = \{I = [a/2^k, (a+1)/2^k) \times [b/2^k, (b+1)/2^k) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A, I \cap A_{k-1} = \emptyset\}$$

$$A_k = A_{k-1} \cup \bigcup_{I \in V_k} I \quad \dots \quad A_\infty = \bigcup A_k$$

Z konstrukce plyne $A_\infty \subseteq A$.

Měřitelnost otevřených množin

Ukážeme, že otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ je možné vyjádřit jako spočetné disjunktní sjednocení intervalů $G = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Odtud pak plyne Lebesgueovská měřitelnost otevřených množin.

Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$, nemusí být otevřená. Vytvoříme $A_\infty \subseteq A$:

$$V_0 = \{I = [a, a+1) \times [b, b+1) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A\}$$

$$A_0 = \bigcup_{I \in V_0} I$$

Další kroky

$$V_k = \{I = [a/2^k, (a+1)/2^k) \times [b/2^k, (b+1)/2^k) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A, I \cap A_{k-1} = \emptyset\}$$

$$A_k = A_{k-1} \cup \bigcup_{I \in V_k} I \quad \ldots \quad A_\infty = \bigcup A_k$$

Z konstrukce plyne $A_\infty \subseteq A$.

Měřitelnost otevřených množin

Ukážeme, že otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ je možné vyjádřit jako spočetné disjunktní sjednocení intervalů $G = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Odtud pak plyne Lebesgueovská měřitelnost otevřených množin.

Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$, nemusí být otevřená. Vytvoříme $A_\infty \subseteq A$:

$$V_0 = \{I = [a, a+1) \times [b, b+1) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A\}$$

$$A_0 = \bigcup_{I \in V_0} I$$

Další kroky

$$V_k = \{I = [a/2^k, (a+1)/2^k) \times [b/2^k, (b+1)/2^k) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A, I \cap A_{k-1} = \emptyset\}$$

$$A_k = A_{k-1} \cup \bigcup_{I \in V_k} I \quad \dots \quad A_\infty = \bigcup A_k$$

Z konstrukce plyne $A_\infty \subseteq A$.

Měřitelnost otevřených množin

Ukážeme, že otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ je možné vyjádřit jako spočetné disjunktní sjednocení intervalů $G = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Odtud pak plyne Lebesgueovská měřitelnost otevřených množin.

Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$, nemusí být otevřená. Vytvoříme $A_\infty \subseteq A$:

$$V_0 = \{I = [a, a+1) \times [b, b+1) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A\}$$

$$A_0 = \bigcup_{I \in V_0} I$$

Další kroky

$$V_k = \{I = [a/2^k, (a+1)/2^k) \times [b/2^k, (b+1)/2^k) : a, b \in \mathbb{Z}, I \subset A, I \cap A_{k-1} = \emptyset\}$$

$$A_k = A_{k-1} \cup \bigcup_{I \in V_k} I \quad \dots \quad A_\infty = \bigcup A_k$$

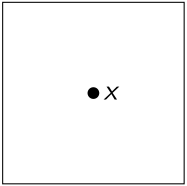
Z konstrukce plyne $A_\infty \subseteq A$.

Měřitelnost otevřených množin – pokračování

Na minulém slajdu jsme k množině $A \subset \mathbb{R}^2$ zkonstruovali spočetné sjednocení intervalů $A_\infty \subseteq A$.

Ukážeme, že pro otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ platí $G = G_\infty$.

Nechť je $x \in G$. Protože je G otevřená množina, existuje čtverec C, že $x \in C \subset G$.



Při volbě dostatečně velkého $k \in \mathbb{N}$ a vhodného $a, b \in \mathbb{Z}$ bude C obsahovat interval

$$I = [a/2^k, (a+1)/2^k) \times [b/2^k, (b+1)/2^k)$$

Odtud plyne $x \in G_\infty$. Bod $x \in G$ jsme volili libovolně, proto je $G = G_\infty$.

Lebesgueovsky neměřitelná množina

Na množině $A \equiv [0,1)$ zavedeme ekvivalenci $x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$ a vytvoříme třídy ekvivalence

$$A_x = \{y \in [0,1) : y - x \in \mathbb{Q}\}$$

$A_0 = A_2 = \cdots$

$A_{\sqrt{2}} = A_{\sqrt{2}+1/2}$

A_π

$A_{\sqrt{2}+\pi}$

$\vdots$

Z každé třídy vezmeme jeden prvek a vytvoříme tak množinu B.
Pro $q \in A$ vytvoříme množiny

$$B_q \equiv \{y \in [0,1) : y - q \in B \vee y - q + 1 \in B\}$$

(Posunuli jsme B o q doprava a část, která je za jedničkou pak o jedna doleva.)

Množiny B_q mají stejnou vnější míru: $m^*(B_q) = m^*(B_r)$, dále $\cup_{q \in A} B_q = [0,1)$ je spočetné disjunktní sjednocení. Odtud plyne, že míra B nemůže být ani nulová, ani kladná, což je spor.
Proto nemůže být B měřitelná.

Lebesgueovsky neměřitelná množina

Na množině $A \equiv [0,1)$ zavedeme ekvivalenci $x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$ a vytvoříme třídy ekvivalence

$$A_x = \{y \in [0,1) : y - x \in \mathbb{Q}\}$$

$A_0 = A_2 = \cdots$

$A_{\sqrt{2}} = A_{\sqrt{2}+1/2}$

A_π

$A_{\sqrt{2}+\pi}$

$\vdots$

Z každé třídy vezmeme jeden prvek a vytvoříme tak množinu B.
Pro $q \in A$ vytvoříme množiny

$$B_q \equiv \{y \in [0,1) : y - q \in B \vee y - q + 1 \in B\}$$

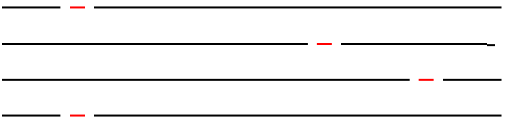
(Posunuli jsme B o q doprava a část, která je za jedničkou pak o jedna doleva.)

Množiny B_q mají stejnou vnější míru: $m^*(B_q) = m^*(B_r)$, dále $\cup_{q \in A} B_q = [0,1)$ je spočetné disjunktní sjednocení. Odtud plyne, že míra B nemůže být ani nulová, ani kladná, což je spor.
Proto nemůže být B měřitelná.

Lebesgueovsky neměřitelná množina

Na množině $A \equiv [0,1)$ zavedeme ekvivalenci $x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$ a vytvoříme třídy ekvivalence

$$A_x = \{y \in [0,1) : y - x \in \mathbb{Q}\}$$



$A_0 = A_2 = \cdots$

$A_{\sqrt{2}} = A_{\sqrt{2}+1/2}$

A_π

$A_{\sqrt{2}+\pi}$

$\vdots$

Z každé třídy vezmeme jeden prvek a vytvoříme tak množinu B.

Pro $q \in A$ vytvoříme množiny

$$B_q \equiv \{y \in [0,1) : y - q \in B \vee y - q + 1 \in B\}$$

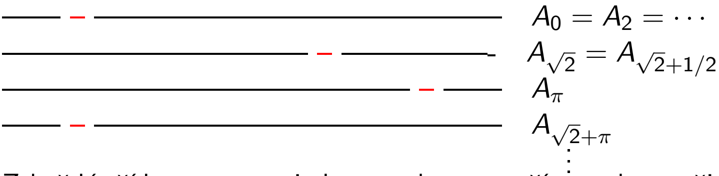
(Posunuli jsme B o q doprava a část, která je za jedničkou pak o jedna doleva.)

Množiny B_q mají stejnou vnější míru: $m^*(B_q) = m^*(B_r)$, dále $\cup_{q \in A} B_q = [0,1)$ je spočetné disjunktní sjednocení. Odtud plyne, že míra B nemůže být ani nulová, ani kladná, což je spor.
Proto nemůže být B měřitelná.

Lebesgueovsky neměřitelná množina

Na množině $A \equiv [0,1)$ zavedeme ekvivalenci $x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$ a vytvoříme třídy ekvivalence

$$A_x = \{y \in [0,1) : y - x \in \mathbb{Q}\}$$



Z každé třídy vezmeme jeden prvek a vytvoříme tak množinu B.
Pro $q \in A$ vytvoříme množiny

$$B_q \equiv \{y \in [0,1) : y - q \in B \vee y - q + 1 \in B\}$$

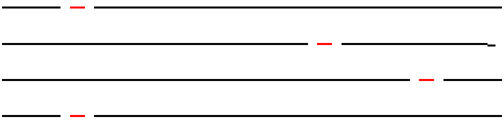
(Posunuli jsme B o q doprava a část, která je za jedničkou pak o jedna doleva.)

Množiny B_q mají stejnou vnější míru: $m^*(B_q) = m^*(B_r)$, dále $\cup_{q \in A} B_q = [0,1)$ je spočetné disjunktní sjednocení. Odtud plyne, že míra B nemůže být ani nulová, ani kladná, což je spor.
Proto nemůže být B měřitelná.

Lebesgueovsky neměřitelná množina

Na množině $A \equiv [0,1)$ zavedeme ekvivalenci $x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$ a vytvoříme třídy ekvivalence

$$A_x = \{y \in [0,1) : y - x \in \mathbb{Q}\}$$



$A_0 = A_2 = \cdots$

$A_{\sqrt{2}} = A_{\sqrt{2}+1/2}$

A_π

$A_{\sqrt{2}+\pi}$

$\vdots$

Z každé třídy vezmeme jeden prvek a vytvoříme tak množinu B.
Pro $q \in A$ vytvoříme množiny

$$B_q \equiv \{y \in [0,1) : y - q \in B \vee y - q + 1 \in B\}$$

(Posunuli jsme B o q doprava a část, která je za jedničkou pak o jedna doleva.)

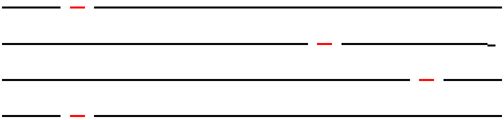
Množiny B_q mají stejnou vnější míru: $m^*(B_q) = m^*(B_r)$, dále $\cup_{q \in A} B_q = [0,1)$ je spočetné disjunktní sjednocení. Odtud plyne, že míra B nemůže být ani nulová, ani kladná, což je spor.

Proto nemůže být B měřitelná.

Lebesgueovsky neměřitelná množina

Na množině $A \equiv [0,1)$ zavedeme ekvivalenci $x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$ a vytvoříme třídy ekvivalence

$$A_x = \{y \in [0,1) : y - x \in \mathbb{Q}\}$$



$A_0 = A_2 = \cdots$

$A_{\sqrt{2}} = A_{\sqrt{2}+1/2}$

A_π

$A_{\sqrt{2}+\pi}$

$\vdots$

Z každé třídy vezmeme jeden prvek a vytvoříme tak množinu B.
Pro $q \in A$ vytvoříme množiny

$$B_q \equiv \{y \in [0,1) : y - q \in B \vee y - q + 1 \in B\}$$

(Posunuli jsme B o q doprava a část, která je za jedničkou pak o jedna doleva.)

Množiny B_q mají stejnou vnější míru: $m^*(B_q) = m^*(B_r)$, dále $\cup_{q \in A} B_q = [0,1)$ je spočetné disjunktní sjednocení. Odtud plyne, že míra B nemůže být ani nulová, ani kladná, což je spor.
Proto nemůže být B měřitelná.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.

Vztah Jordanovské a Lebesgueovské měřitelnosti

Věta. Je-li množina $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordanovsky měřitelná, pak je i Lebesgueovsky měřitelná a míry se rovnají: $jm(A) = m(A)$.

Důkaz. Pro množiny horních součtů množiny $A \subset \mathbb{R}^2$:
$js^*(A) = \{\sum_{k=1}^{n} O(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \supseteq A\}$
$ls^*(A) = \{\sum_{k=1}^{\infty} O(I_k) : \cup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A\}$
platí $js^*(A) \subseteq ls^*(A)$. Odtud plyne $\inf js^*(A) \geq \inf ls^*(A)$, tj. $jm^*(A) \geq m^*(A)$.
Totéž platí pro množiny $I \cap A$, $I \setminus A$ a tedy
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A)$
Dále ze subaditivity vnější míry plyne
$m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq m^*(I) = O(I)$
Dostáváme tedy nerovnosti
$jm^*(A \cap I) + jm^*(I \setminus A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(I \setminus A) \geq O(I)$,
ze kterých plyne: rovná-li se levá strana pravé, pak se jim rovná i prostřední strana. Odtud a z Caratheodoryovy podmínky plyne tvrzení věty.