

Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3

17. září 2024

Posloupnosti funkcí

1. Načrtněte grafy funkcí f_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f_n(x) = |1 - nx|$$

2. Načrtněte grafy funkcí f_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f_n(x) = 1 - |1 - nx|$$

3. Načrtněte grafy funkcí g_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$ a vypočtěte limitu $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$.

$$g_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}^1$$

4. Načrtněte grafy funkcí g_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$ a vypočtěte limitu $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$.

$$g_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}$$

5. Ukažte, že posloupnost $\{(\sin x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je pro $x \in \mathbb{R}$ geometrická a vypočtěte její kvocient.

6. Načrtněte grafy několika členů posloupnosti z příkladu 5 a graf její limity, tj. funkce

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x)^n$$

7. Načrtněte grafy funkcí f_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$ a její limity $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

$$f_n(x) = \exp(-nx^2)$$

- 8* Vypočtěte pro $x \in \mathbb{R}$ limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \exp(-nx^2)$$

Výsledek porovnejte s hustotou pravděpodobnosti normálního rozdělení. Případně si nechte vykreslit grafy těchto funkcí.

- 9* Vypočtěte pro $x \in \mathbb{Q}$ limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n! \pi x)$$

¹max značí největší hodnotu ze zadaných hodnot; využijte grafů z předchozího příkladu.