Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
24. září 2024
Posloupnosti funkcí, stejnoměrná konvergence, řady funkcí

1a Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}, \qquad I = \mathbb{R}$$

1b

$$f_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}, \qquad I = \mathbb{R}$$

1c

$$f_n(x) = \exp(-nx), \qquad I = (0, +\infty)$$

1d

$$f_n(x) = \exp(-nx), \qquad I = (1, +\infty)$$

1e

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)}, \qquad I = \mathbb{R}$$

1f

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (0, 2\pi)$$

1g

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (0, \pi/3)$$

1h

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (-\pi/2, \pi/2)$$

1i

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \qquad I = (0, +\infty)$$

1j

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \qquad I = (1, +\infty)$$

1k

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \qquad I = (-1, 1)$$

1l

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \qquad I = (1, 2)$$

1m

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}, \qquad I = (-1, 2)$$

2a Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2b

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k2^k}$$

2c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5x^k}{k^2 3^k}$$

2d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

2e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

2f

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

4* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

5. Vysvětlete, že pro funkce f_n, f spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je možné supremum

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$|\max_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|, \qquad |\min_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|$$