Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
1. října 2024
Mocninné řady

Poznámka: úlohy 2 až 4 jsou zopakovány z minula. Na žádost studentů je možné se vrátit i k jiným minulým úlohám.

1a Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady. Pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která diverguje?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

1b

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$$

1c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

1d

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$$

1e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n + 4^n}$$

1f

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + n^2 + n^3 + n^4}$$

1g

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

1h*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2^n}$$

1i*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

1j*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! + 2^n}$$

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

3* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

4. Vysvětlete, že pro funkce f_n, f spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je možné supremum

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$|\max_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|, \qquad |\min_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|$$