Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
8. října 2024

Poznámka: úlohy 1 až 3 jsou zopakovány z minula. Na žádost studentů je možné se vrátit i k jiným minulým úlohám.

1* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

3. Vysvětlete, že pro funkce f_n, f spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je možné supremum

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$|\max_{x\in[a,b]} (f_n(x) - f(x))|, \qquad |\min_{x\in[a,b]} (f_n(x) - f(x))|$$

4. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Kladné číslo ε je menší než r. Označme $b_n = a_n(r - \varepsilon/2)^n$.

Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

5a Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

5b

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

5c

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

5d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

6. Ukažte, že pro libovolnou dvojici reálných čísel x, y platí

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Návod: Uvažujte všechny případy $x \ge 0$, $x < 0$, $y \ge 0$, $y < 0$, $x+y \ge 0$, $x+y < 0$, které rovinu xy rozdělí na šest částí.

7. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel x, y, z platí $|z-x| \le |y-x| + |z-y|$.

Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

Návod2: použijte výsledek předchozí úlohy.

8. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_2(x,y) = (x-y)^2$$

9. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{1/2})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{1/2}(x,y) = \sqrt{|x-y|}$$

10. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x,y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

11. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

Dosazením $a = y_1 - x_1$, $b = y_2 - x_2$, $c = z_1 - y_1$, $d = z_2 - y_2$ dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

12a Vypočtěte limity

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1^-} x^n \right), \qquad \lim_{x\to 1^-} \left(\lim_{n\to\infty} x^n \right)$$

12b

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to0}\exp(-nx^2)\right), \qquad \lim_{x\to0}\left(\lim_{n\to\infty}\exp(-nx^2)\right)$$

12c Nechť $f_n(x) = \frac{x}{\exp(nx^2)}$ je posloupnost funkcí. Vypočtěte derivaci f_n' a bodové limity posloupností f_n i f_n'. Dále určete, zda pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$$