Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
22. října 2024

Poznámka: úlohy 1 až 21 jsou zopakovány z minula.
Za nimi následují úlohy z poslední přednášky.

1* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

3. Vysvětlete, že pro funkce f_n, f spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je možné supremum

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$|\max_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|, \qquad |\min_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|$$

4. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Kladné číslo ε je menší než r. Označme $b_n = a_n(r - \varepsilon/2)^n$.

   Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

5a Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

5b

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

6. Ukažte, že pro libovolnou dvojici reálných čísel x, y platí

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Návod: Uvažujte všechny případy $x \geq 0$, $x < 0$, $y \geq 0$, $y < 0$, $x+y \geq 0$, $x + y < 0$, které rovinu xy rozdělí na šest částí.

7. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel x, y, z platí $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$.

   Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

   Návod2: použijte výsledek předchozí úlohy.

8. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

9. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Dosazením $a = y_1 - x_1$, $b = y_2 - x_2$, $c = z_1 - y_1$, $d = z_2 - y_2$ dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

10. Nechť $f_n(x) = \frac{x}{\exp(nx^2)}$ je posloupnost funkcí. Vypočtěte derivaci f_n' a bodové limity posloupností f_n i f_n'. Dále určete, zda pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$$

11. Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = (1 + x)^\alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a určete její poloměr konvergence.

12* Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = 1/(1 - x^2)$ a určete její poloměr konvergence.

13a* Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

13b* Vypočtěte $f''(0)$.

13c* Vypočtěte $f^{(3)}(0)$.

13d** Odvoďte Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě nula.

14. Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Ukažte, že (V, ϱ), kde $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ je metrický prostor.

15. Ukažte, že $\|(x_1,x_2)\|_{l^1} := |x_1| + |x_2|$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

16* Ukažte, že $\|(x_1,x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

17. Ukažte, že euklidovská norma splňuje axiomy (N1), (N2) normy.

18. Odvoďte a nakreslete jednotkovou kouli se středem v počátku v $\mathbb{R}^2$ v maximové metrice.

19* Ukažte, že v metrickém prostoru s metrikou ϱ jsou ekvivalentní výroky

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$$

20. Použijte předchozí cvičení k důkazu, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je limita posloupnosti $x_n = (1/(n+1), (-1)^n/(n^2+1))$ rovna $o = (0,0)$. Tj. vypočtěte limitu číselné posloupnosti a ukažte, že je rovna nule

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, o)$$

21. Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \varrho_{eukl})$ je

   (a) otevřený interval (a,b) otevřená množina,
   (b) uzavřený interval $[a,b]$ uzavřená množina.

22. Napište definici otevřené množiny a ukažte, že jednoprvková množina (např $\{0\}$) není v euklidovském metrickém prostoru otevřená.

23. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) ukažte

   (i) pro $x \in M$, $r > 0$ je okolí $B(x,r)$ otevřená množina,
   (ii) M je otevřená množina,
   (iii) $\emptyset$ je otevřená množina,
   (iv) $\emptyset$ a M jsou uzavřené množiny.

24. Dokažte de Morganovy vzorce

$$M \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} (M \setminus A_\alpha), \qquad M \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (M \setminus A_\alpha),$$

Návod: rozmyslete si, jaký vztah má prvek $x \in M \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ k množinám A_α. A podobně pro pravou stranu.

25. Dokažte: Pokud jsou (F_α) uzavřené množiny, pak

(i) je uzavřený jejich průnik

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

(ii) sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Tedy pro $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ je uzavřená množina

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_i$$

26. Rozmyslete si, čemu jsou v euklidovském prostoru rovny množiny

$$\overline{(a,b)}, \quad \overline{\mathbb{Q}}, \quad \mathbb{Q}^o$$

27. Ukažte, že pro otevřenou množinu G platí $G^o = G$.

28. Ukažte, že pro uzavřenou množinu F platí $\overline{F} = F$.