

## Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3

### 29. října 2024

Poznámka: úlohy 1 až 24 jsou zopakovány z minula.

Za nimi následují úlohy z poslední přednášky.

1\* Vysvětlete proč pro  $M \subset \mathbb{R}$  a funkce  $f_n, f$  platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \implies (f_n \rightarrow f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině  $M$  plyne bodová konvergence.

2\* Vysvětlete proč pro  $M \subset \mathbb{R}$  a funkce  $f_n, f$  platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \iff \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0 \right)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině  $M$  je nulová limita suprema výrazu  $|f_n(x) - f(x)|$  na množině  $M$ .

3. Vysvětlete, že pro funkce  $f_n, f$  spojitě na uzavřeném intervalu  $[a, b]$  je možné supremum

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$\left| \max_{x \in [a, b]} (f_n(x) - f(x)) \right|, \quad \left| \min_{x \in [a, b]} (f_n(x) - f(x)) \right|$$

4. Mocninná řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  má poloměr konvergence  $r > 0$ . Kladné číslo  $\varepsilon$  je menší než  $r$ . Označme  $b_n = a_n(r - \varepsilon/2)^n$ .

Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

5a\* Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

5b\*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

6. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel  $x, y, z$  platí  $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$ .

Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

Návod2: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

7. Zjistěte, zda  $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$  je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

8. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Dosazením  $a = y_1 - x_1, b = y_2 - x_2, c = z_1 - y_1, d = z_2 - y_2$  dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

9. Nechť  $f_n(x) = \frac{x}{\exp(nx^2)}$  je posloupnost funkcí. Vypočtěte derivaci  $f'_n$  a bodové limity posloupností  $f_n$  i  $f'_n$ . Dále určete, zda pro  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'$$

10. Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce  $f(x) = (1+x)^\alpha$  pro  $\alpha \in \mathbb{R}$  a určete její poloměr konvergence.

- 11\* Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce  $f(x) = 1/(1-x^2)$  a určete její poloměr konvergence.

- 12a\* Vypočtěte derivaci funkce  $f$  v bodě  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- 12b\* Vypočtěte  $f''(0)$ .

- 12c\* Vypočtěte  $f^{(3)}(0)$ .

- 12d\*\* Odvoďte Taylorovu řadu funkce  $f$  se středem v bodě nula.

13. Nechť  $(V, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor. Ukažte, že  $(V, \varrho)$ , kde  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$  je metrický prostor.

- 14\* Ukažte, že  $\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$  je normou na  $\mathbb{R}^2$ .

15. Ukažte, že euklidovská norma splňuje axiomy (N1), (N2) normy.
16. Odvoďte a nakreslete jednotkovou kouli se středem v počátku v  $\mathbb{R}^2$  v maximové metrice.
- 17\* Ukažte, že v metrickém prostoru s metrikou  $\varrho$  jsou ekvivalentní výroky

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$$

18. Použijte předchozí cvičení k důkazu, že v metrickém prostoru  $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$  je limita posloupnosti  $x_n = (1/(n+1), (-1)^n/(n^2+1))$  rovna  $o = (0, 0)$ . Tj. vypočítejte limitu číselné posloupnosti a ukažte, že je rovna nule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, o)$$

19. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru  $(M, \varrho)$  ukažte

- (ii)  $M$  je otevřená množina,
- (iii)  $\emptyset$  je otevřená množina,
- (iv)  $\emptyset$  a  $M$  jsou uzavřené množiny.

20. Dokažte de Morganovy vzorce

$$M \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha), \quad M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha),$$

Návod: rozmyslete si, jaký vztah má prvek  $x \in M \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  k množinám  $A_\alpha$ . A podobně pro pravou stranu.

21. Dokažte: Pokud jsou  $(F_\alpha)$  uzavřené množiny, pak

- (i) je uzavřený jejich průnik

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

- (ii) sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Tedy pro  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  je uzavřená množina

$$\bigcup_{k=1}^n F_k$$

22. Rozmyslete si, čemu jsou v euklidovském prostoru rovny množiny

$$\overline{(a, b)}, \quad \overline{\mathbb{Q}}, \quad \mathbb{Q}^\circ$$

23. UkaŹte, Źe pro otevřenou množinu  $G$  platí  $G^\circ = G$ .
24. UkaŹte, Źe pro uzavřenou množinu  $F$  platí  $\overline{F} = F$ .
25. UkaŹte, Źe funkce  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$  je spojitá na svém definičním oboru  $D_f = \mathbb{R}^n$ .
- 26a Vypočtěte limity po všech přímkách a řekněte, co z výsledku plyne pro limitu funkce dvou proměnných

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

26b

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

26c

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$