Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
19. listopadu 2024

Poznámka: úlohy 1 až 22 jsou zopakovány z minula.
Za nimi následují úlohy z poslední přednášky.

1* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

3. Vysvětlete, že pro funkce f_n, f spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je možné supremum

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$|\max_{x\in[a,b]} (f_n(x) - f(x))|, \qquad |\min_{x\in[a,b]} (f_n(x) - f(x))|$$

4. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Kladné číslo ε je menší než r. Označme $b_n = a_n(r - \varepsilon/2)^n$.

Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

5a* Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

5b*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

6. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel x, y, z platí $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$.

   Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

   Návod2: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

7. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

8. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

   Dosazením $a = y_1 - x_1$, $b = y_2 - x_2$, $c = z_1 - y_1$, $d = z_2 - y_2$ dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

9. Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = (1 + x)^\alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a určete její poloměr konvergence.

10* Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = 1/(1 - x^2)$ a určete její poloměr konvergence.

11a* Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

11b* Vypočtěte $f''(0)$.

11c* Vypočtěte $f^{(3)}(0)$.

11d** Odvoďte Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě nula.

12* Ukažte, že $\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

13. Odvoďte a nakreslete jednotkovou kouli se středem v počátku v $\mathbb{R}^2$ v maximové metrice.

14. Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je limita posloupnosti $x_n = (1/(n+1), (-1)^n/(n^2+1))$ rovna $o = (0, 0)$. Tj. vypočtěte limitu číselné posloupnosti a ukažte, že je rovna nule

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, o)$$

15. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) ukažte

    (ii) M je otevřená množina,

    (iii) $\emptyset$ je otevřená množina,

    (iv) $\emptyset$ a M jsou uzavřené množiny.

16. Dokažte de Morganův vzorec

$$M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha),$$

    Návod: rozmyslete si, jaký vztah má prvek $x \in M \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ k množinám A_α. A podobně pro pravou stranu.

17. Dokažte: Pokud jsou (F_α) uzavřené množiny, pak

    (i) je uzavřený jejich průnik

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

    (ii) sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Tedy pro $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ je uzavřená množina

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_i$$

18. Rozmyslete si, čemu jsou v euklidovském prostoru rovny množiny

$$\overline{(a, b)}, \quad \overline{\mathbb{Q}}, \quad \mathbb{Q}^o$$

19. Ukažte, že pro uzavřenou množinu F platí $\overline{F} = F$.

20. Pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme funkci χ_A charakteristickou funkcí množiny A a definujeme ji předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

    Ukažte, že funkce $f(x, y) = \chi_{\{y=x^2\}} \chi_{\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}}$

    (a) Není spojitá v bodě $(0, 0)$.

    (b) Pro $h \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ je $d_h f((0, 0)) = 0$.

21. Nechť $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definujme

$$f(x) = a \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Ukažte, že f je lineární zobrazení vektorového prostoru $V_1 = \mathbb{R}^n$ do vektorového prostoru $V_2 = \mathbb{R}$.

22. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní

    (a) $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a) - Dt}{t} = 0$

    (b) $D = f'(a)$

23. Ukažte, že pro funkci jedné proměnné f a bod $a \in \mathbb{R}$ polynom

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

splňuje

$$T^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad \text{pro } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Návod: začněte konkrétní hodnotou $n = 2, 3, \dots$.

24. Na přednášce jste odvodili Taylorův polynom T stupně dva funkce f v bodě a pro

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 2x_2), \qquad a = (1, 1)$$

Ukažte, že pro multiindexy α velikosti $|\alpha| \leq 2$ platí

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(a)$$

25. Ukažte, že funkce $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$ je v bodě $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$

    (a) diferencovatelná,

    (b) dvakrát diferencovatelná,

    (c) třikrát diferencovatelná,

    (d) n-krát diferencovatelná pro $n \in \mathbb{R}$.

26. Uvažujme metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ s euklidovskopu metrikou ϱ.
Napište definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Dále napište definici spojitosti funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Ukažte, že funkce $g := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ právě když jsou v bodě a spojité obě funkce $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2\}$.

27. Napište Taylorův polynom stupně dva funkce f v bodě $a = (1, -2)$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3xy}{x + y}$$