Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
26. listopadu 2024

Poznámka: úlohy 1 až 19 jsou zopakovány z minula.
Za nimi následují úlohy z poslední přednášky.

1* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

3. Vysvětlete, že pro funkce f_n, f spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je možné supremum

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

nahradit maximem

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

a že toto maximum lze nahradit větším z čísel

$$|\max_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|, \qquad |\min_{x\in[a,b]}(f_n(x) - f(x))|$$

4. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Kladné číslo ε je menší než r. Označme $b_n = a_n(r - \varepsilon/2)^n$.

   Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

5. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel x, y, z platí $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$.

   Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

   Návod2: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

6. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

7. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

   Dosazením $a = y_1 - x_1$, $b = y_2 - x_2$, $c = z_1 - y_1$, $d = z_2 - y_2$ dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

8. Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a určete její poloměr konvergence.

9a* Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

9b* Vypočtěte $f''(0)$.

9c* Vypočtěte $f^{(3)}(0)$.

9d** Odvoďte Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě nula.

10* Ukažte, že $\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

11. Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je limita posloupnosti $x_n = (1/(n+1), (-1)^n/(n^2+1))$ rovna $o = (0, 0)$. Tj. vypočtěte limitu číselné posloupnosti a ukažte, že je rovna nule

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, o)$$

12. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) ukažte

    (ii) M je otevřená množina,

    (iii) $\emptyset$ je otevřená množina,

    (iv) $\emptyset$ a M jsou uzavřené množiny.

13. Dokažte de Morganův vzorec

$$M \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (M \setminus A_\alpha),$$

   Návod: rozmyslete si, jaký vztah má prvek $x \in M \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ k množinám A_α. A podobně pro pravou stranu.

14. Dokažte: Pokud jsou (F_α) uzavřené množiny, pak

    (i) je uzavřený jejich průnik
    $$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

    (ii) sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Tedy pro $I = \{1, 2, \dots, n\}$ je uzavřená množina
    $$\bigcup_{k=1}^{n} F_i$$

15. Ukažte, že pro uzavřenou množinu F platí $\overline{F} = F$.

16. Pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme funkci χ_A charakteristickou funkcí množiny A a definujeme ji předpisem
    $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$
    Ukažte, že funkce $f(x, y) = \chi_{\{y=x^2\}} \chi_{\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}}$

    (a) Není spojitá v bodě $(0, 0)$.

    (b) Pro $h \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ je $d_h f((0, 0)) = 0$.

17. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní

    (a) $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a) - Dt}{t} = 0$

    (b) $D = f'(a)$

18. Na přednášce jste odvodili Taylorův polynom T stupně dva funkce f v bodě a pro
    $$f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 2x_2), \qquad a = (1, 1)$$
    Ukažte, že pro multiindexy α velikosti $|\alpha| \leq 2$ platí
    $$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(a)$$

19. Uvažujme metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ s euklidovskopu metrikou ϱ.
    Napište definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
    Dále napište definici spojitosti funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
    Ukažte, že funkce $g := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ právě když jsou v bodě a spojité obě funkce $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2\}$.

20. Nechť f je funkce jedné proměnné, bod $a \in \mathbb{R}$ a f má na okolí $U_\delta(a)$ druhou derivaci f''. Ukažte, že platí

   (a) Je-li $(\forall x \in U(a))(f''(x) > 0)$, pak je f' rostoucí na $U_\delta(a)$.

   (b) Je-li f' rostoucí na $U_\delta(a)$ a zároveň je $f'(a) = 0$, pak je f klesající na levém okolí $(a-\delta, a]$ bodu a a zároveň rostoucí na pravém okolí $[a, a+\delta)$ bodu a.

   (c) Je-li $(\forall x \in U(a))(f''(x) > 0)$ a zároveň je $f'(a) = 0$, pak má f v bodě a lokální minimum.

   Poznámka: výrok $(\forall x \in U(a))(f''(x) > 0)$ lze nahradit slabší podmínkou $f''(a) > 0$.

   Ukažte podobně ve třech krocích implikaci

$$(f''(a) < 0 \quad \wedge \quad f'(a) = 0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ má v bodě } a \text{ lokální maximum}$$

21. Napište definice pojmů:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální minimum (maximum)

   (b) $\varphi_h(t) := f(a + th)$ má v bodě $t = 0$ lokální minimum (maximum)

   a ukažte, že platí implikace

$$\text{(a)} \quad \Rightarrow \quad \text{(b) platí } \forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

22. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_h(t) = f(a + th)$ pro $h \in \mathbb{R}^2$.

   Vypočtěte pro $h \in \{e_1, e_2\}$[1] derivace $\varphi_h''(0)$ a ukažte, že platí

$$\varphi_h''(0) = h \nabla^2 f(a) h^T \quad \text{pro } h \in \{e_1, e_2\}$$

23a Nalezněte bod/-y, ve kterých je splněná nutná podmínka existence extrému $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ pro funkci

$$f(x, y) = x^2 - 4x - y^2 + 6y$$

Ověřte v těchto bodech postačující podmínku $h\nabla^2 f(x) h^T \gtrless 0$.

Co odtud plyne pro existenci extrému/-ů?

23b

$$f(x, y) = x^2 - 3xy$$

23c

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + 5x$$

[1] Připomínáme, že $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.