Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
3. prosince 2024

Poznámka: úlohy 1 až 14 jsou zopakovány z minula.
Úloha 15 je analogií úlohy řešené na minulém cvičení.
K úloze 16 zopakované z minula jsem přidala další dva úkoly.
Úloha 17 je výzva k návratu k některým z opomíjených úloh.
Za nimi následují úlohy z poslední přednášky.

1* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

3. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel x, y, z platí $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$.

   Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

   Návod2: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

4. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

5. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

   Dosazením $a = y_1 - x_1$, $b = y_2 - x_2$, $c = z_1 - y_1$, $d = z_2 - y_2$ dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

6* Ukažte, že $\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

7. Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je limita posloupnosti $x_n = (1/(n+1), (-1)^n/(n^2+1))$ rovna $o = (0,0)$. Tj. vypočtěte limitu číselné posloupnosti a ukažte, že je rovna nule

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, o)$$

8. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) ukažte

   (ii) M je otevřená množina,

   (iii) $\emptyset$ je otevřená množina,

   (iv) $\emptyset$ a M jsou uzavřené množiny.

9. Dokažte: Pokud jsou (F_α) uzavřené množiny, pak

   (i) je uzavřený jejich průnik

   $$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$$

   (ii) sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Tedy pro $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ je uzavřená množina

   $$\bigcup_{k=1}^{n} F_i$$

10. Ukažte, že pro uzavřenou množinu F platí $\overline{F} = F$.

11. Pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme funkci χ_A charakteristickou funkcí množiny A a definujeme ji předpisem

    $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

    Ukažte, že funkce $f(x,y) = \chi_{\{y=x^2\}}\chi_{\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}}$

    (a) Není spojitá v bodě $(0,0)$.

    (b) Pro $h \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ je $d_h f((0,0)) = 0$.

12. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní

    (a) $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)-Dt}{t} = 0$

    (b) $D = f'(a)$

13. Na přednášce jste odvodili Taylorův polynom T stupně dva funkce f v bodě a pro

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 2x_2), \qquad a = (1, 1)$$

Ukažte, že pro multiindexy α velikosti $|\alpha| \leq 2$ platí

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(a)$$

14. Uvažujme metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ s euklidovskopu metrikou ϱ.
Napište definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Dále napište definici spojitosti funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Ukažte, že funkce $g := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ právě když jsou v bodě a spojité obě funkce $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2\}$.

15. Nechť f je funkce jedné proměnné, bod $a \in \mathbb{R}$ a f má na okolí $U_\delta(a)$ druhou derivaci f''. Ukažte, že platí

    (a) Je-li $(\forall x \in U(a))(f''(x) < 0)$, pak je f' klesající na $U_\delta(a)$.

    (b) Je-li f' klesající na $U_\delta(a)$ a zároveň je $f'(a) = 0$, pak je f rostoucí na levém okolí $(a-\delta, a]$ bodu a a zároveň klesající na pravém okolí $[a, a+\delta)$ bodu a.

    (c) Je-li $(\forall x \in U(a))(f''(x) < 0)$ a zároveň je $f'(a) = 0$, pak má f v bodě a lokální maximum.

    Poznámka: výrok $(\forall x \in U(a))(f''(x) < 0)$ lze nahradit slabší podmínkou $f''(a) < 0$.

16. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_h(t) = f(a + th)$ pro $h \in \mathbb{R}^2$.

    Vypočtěte pro $h \in \{e_1, e_2\}$[1] derivace $\varphi_h''(0)$ a ukažte, že platí

    (a)
$$\varphi_h''(0) = h\nabla^2 f(a)h^T \quad \text{pro } h \in \{e_1, e_2\}$$

    (b)
$$\varphi_h''(0) = h\nabla^2 f(a)h^T \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

    (c)
$$\varphi_h''(t) = h\nabla^2 f(a+th)h^T \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

17. Podívejte se na úlohy k písemné části zkoušky, doporučuji především na úlohy 10 až 12.

[1] Připomínáme, že $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

18. Vypočtěte vzdálenost mimoběžek AB, CD pro $A[1,2,0]$, $B[1,0,1]$, $C[0,1,2]$, $D[1,0,0]$. Hledejte

    $\min\{\|X(t)-Y(s)\| : X(t) = A+t(B-A), Y(s) = C+s(D-C), t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\}$

19* Nalezněte vzorec pro vzdálenost mimoběžek AB, CD jako funkci bodů A, B, C, D.

20a Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 - xy + 2y - y^2$$

20b

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 32y$$

21ab Pro funkce z předchozího příkladu napište Taylorův polynom druhého stupně v bodech, které splňují nutnou podmínku lokálního extrému.

21c* Taylorův polynom třetího stupně.

22. Pro funkci f

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

    vypočtěte

    (a) $f_x(0,y)$ pro $y \neq 0$
    (b) $f_y(x,0)$ pro $x \neq 0$
    (c) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$
    (d) $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$

23* Načrtněte množinu $U_\delta(M)$ pro $\delta = 1$ a

    (a) $M = \{(0,0)\}$
    (b) $M = \{(t,t) : t \in [0,1]\}$
    (c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [-1,1]\}$

24* Ukažte, že pro $M \subseteq R^2$ je $U_\delta(M)$ otevřená množina.

25* Ukažte, že pro $M \subseteq R^2$ je $\cap_{n=1}^{\infty} U_{1/n}(M)$ uzavřená množina.

26a Nechť $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Ukažte, že funkce $g(s,t) = f(s\cos(t), s\sin(t))$ je $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ a pomocí řetízkového pravidla vyjádřete derivace g_s, g_t.

26b Ukažte, že funkce $h(t) = f(t^2 - t, 2 - t)$ je $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ a pomocí řetízkového pravidla vyjádřete derivaci h'.