Úlohy na cvičení z Matematické analýzy 3
10. prosince 2024

Poznámka: úlohy 1 až 16 jsou zopakovány z minula.

Následuje odkaz na úlohy ke zkoušce.

Cvičení povede kolega Soudský, pravděpodobně si pro vás připraví svoje úlohy.

1* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí implikace

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longrightarrow \quad (f_n \to f \text{ na } M)$$

Tedy ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M plyne bodová konvergence.

2* Vysvětlete proč pro $M \subset \mathbb{R}$ a funkce f_n, f platí ekvivalence

$$(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Tedy, že nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na množině M je nulová limita suprema výrazu $|f_n(x) - f(x)|$ na množině M.

3. Ukažte, že pro každou trojici reálných čísel x, y, z platí $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$.

   Návod: proberte všechna možná pořadí bodů na číselné ose.

   Návod2: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

4. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \varrho_{diskr})$ je metrický prostor, kde

$$\varrho_{diskr}(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y$$

5. Ukažte, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

   Dosazením $a = y_1 - x_1$, $b = y_2 - x_2$, $c = z_1 - y_1$, $d = z_2 - y_2$ dostaneme v závěru přednášky dokazovanou trojúhelníkovou nerovnost.

6* Ukažte, že $\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

7. Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je limita posloupnosti $x_n = (1/(n+1), (-1)^n/(n^2+1))$ rovna $o = (0,0)$. Tj. vypočtěte limitu číselné posloupnosti a ukažte, že je rovna nule

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, o)$$

8. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) ukažte

   (ii) M je otevřená množina,

   (iii) $\emptyset$ je otevřená množina,

   (iv) $\emptyset$ a M jsou uzavřené množiny.

9. Dokažte: Pokud jsou (F_α) uzavřené množiny, pak

   (i) je uzavřený jejich průnik
   $$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$$

   (ii) sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Tedy pro $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ je uzavřená množina
   $$\bigcup_{k=1}^{n} F_i$$

10. Ukažte, že pro uzavřenou množinu F platí $\overline{F} = F$.

11. Pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme funkci χ_A charakteristickou funkcí množiny A a definujeme ji předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

   Ukažte, že funkce $f(x,y) = \chi_{\{y=x^2\}}\chi_{\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}}$

   (a) Není spojitá v bodě $(0,0)$.

   (b) Pro $h \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ je $d_h f((0,0)) = 0$.

12. Na přednášce jste odvodili Taylorův polynom T stupně dva funkce f v bodě a pro

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 2x_2), \qquad a = (1,1)$$

   Ukažte, že pro multiindexy α velikosti $|\alpha| \leq 2$ platí

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}(a)$$

13. Uvažujme metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho)$ s euklidovskopu metrikou ϱ.
    Napište definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
    Dále napište definici spojitosti funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
    Ukažte, že funkce $g := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ právě když jsou v bodě a spojité obě funkce $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2\}$.

14. Nechť f je funkce jedné proměnné, bod $a \in \mathbb{R}$ a f má na okolí $U_\delta(a)$ druhou derivaci f''. Ukažte, že platí

    (a) Je-li $(\forall x \in U(a))(f''(x) < 0)$, pak je f' klesající na $U_\delta(a)$.

    (b) Je-li f' klesající na $U_\delta(a)$ a zároveň je $f'(a) = 0$, pak je f rostoucí na levém okolí $(a-\delta, a]$ bodu a a zároveň klesající na pravém okolí $[a, a+\delta)$ bodu a.

    (c) Je-li $(\forall x \in U(a))(f''(x) < 0)$ a zároveň je $f'(a) = 0$, pak má f v bodě a lokální maximum.

    Poznámka: výrok $(\forall x \in U(a))(f''(x) < 0)$ lze nahradit slabší podmínkou $f''(a) < 0$.

15. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_h(t) = f(a + th)$ pro $h \in \mathbb{R}^2$.
    Vypočtěte pro $h \in \{e_1, e_2\}$[1] derivace $\varphi_h''(0)$ a ukažte, že platí

    (a)
    $$\varphi_h''(0) = h\nabla^2 f(a)h^T \quad \text{pro } h \in \{e_1, e_2\}$$

    (b)
    $$\varphi_h''(0) = h\nabla^2 f(a)h^T \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

    (c)
    $$\varphi_h''(t) = h\nabla^2 f(a+th)h^T \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

16. Pro funkci f
    $$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$
    vypočtěte

    (a) $f_x(0, y)$ pro $y \neq 0$

    (b) $f_y(x, 0)$ pro $x \neq 0$

    (c) $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$

    (d) $f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$

17. Podívejte se na úlohy k písemné části zkoušky, doporučuji především na úlohy 10 až 12 a 22, 23.

---

[1] Připomínáme, že $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.