

Úlohy k písemné části zkoušky z Matematické analýzy 3

12. listopadu 2024

Jsou zde úlohy zkopírované ze cvičení. Před koncem semestru u některých změním zadání.

1a Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}, \quad I = \mathbb{R}$$

1b

$$f_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}, \quad I = \mathbb{R}$$

1c

$$f_n(x) = \exp(-nx), \quad I = (0, +\infty)$$

1d

$$f_n(x) = \exp(-nx), \quad I = (1, +\infty)$$

1e

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)}, \quad I = \mathbb{R}$$

1f

$$f_n(x) = \sin^n(x), \quad I = (0, 2\pi)$$

1g

$$f_n(x) = \sin^n(x), \quad I = (0, \pi/3)$$

1h

$$f_n(x) = \sin^n(x), \quad I = (-\pi/2, \pi/2)$$

1i

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad I = (0, +\infty)$$

1j

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad I = (1, +\infty)$$

1k

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \quad I = (-1, 1)$$

1l

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \quad I = (1, 2)$$

1m

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}, \quad I = (-1, 2)$$

2a Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2b

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k2^k}$$

2c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5x^k}{k^2 3^k}$$

2d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

2e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

2f

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3a Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady. Pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která diverguje?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

3b

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$$

3c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

3d

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$$

3e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n + 4^n}$$

3f

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + n^2 + n^3 + n^4}$$

3g

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

4a Sečtete řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{6^n}$$

4b

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

4c

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{4^n}$$

5a Vypočtete limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right)$$

5b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \exp(-nx^2) \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx^2) \right)$$

5c Necht' $s_n(x) = \frac{x}{\exp(nx^2)}$ je posloupnost funkcí. Vypočtete derivaci s'_n a bodové limity posloupností s_n i s'_n . Dále určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \right)'$$

5d Totéž pro funkce (zde jsou s_n funkce z předchozí úlohy).

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n (s_k(x) - s_{k-1}(x))$$

6. Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete její poloměr konvergence.

7a Vypočtete limitu posloupnosti

$$a_n = (x_n, y_n) := \left(\frac{n^2}{2 - 3n^2}, \frac{(-1)^n n}{3 + n - n^3} \right)$$

po složkách, tedy limity

$$a := \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

a ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{eukl}(a_n, a) = 0$$

7b

$$a_n := \left(\frac{(-1)^n n^2}{(n+2)^3}, \frac{(2n-1)^2 + 3}{(n+3)^2} \right)$$

8a Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \varrho_{eukl})$

otevřený interval (a, b) je otevřená množina,

8b otevřený interval (a, b) není uzavřená množina,

8c polouzavřený interval $[a, b)$ není otevřená množina.

8d polouzavřený interval $[a, b]$ není uzavřená množina.

8e uzavřený interval $[a, b]$ je uzavřená množina.

8f uzavřený interval $[a, b]$ není otevřená množina.

8g pro $x \in \mathbb{R}$ je $A := \{x\}$ uzavřená množina.

8h pro $x \in \mathbb{R}$ množina $A := \{x\}$ není otevřená.

8i množina $A := \{\}$ je otevřená.

8j množina $A := \{\}$ je uzavřená.

9a Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ρ) ukažte, že

pro $x \in M$ je množina $A := M \setminus \{x\}$ otevřená.

9b pro $x \in M, r > 0$ je okolí $B(x, r)$ otevřená množina.

9c M je otevřená množina.

9d \emptyset je otevřená množina.

10a Dokažte de Morganův vzorec

$$M \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha),$$

10b

$$M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha),$$

11a Napište definici uzávěru množiny a ukažte, že v prostoru $(\mathbb{R}, \rho_{eukl})$ je pro $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\overline{(a, b)} = [a, b]$$

11b

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

11c

$$\overline{[a, b]} = [a, b]$$

11d

$$\overline{[a, \infty)} = [a, \infty)$$

11e

$$\overline{(-\infty, b]} = (-\infty, b]$$

12a Napište definici vnitřku množiny a ukažte, že v prostoru $(\mathbb{R}, \rho_{eukl})$ je pro $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$$

12b

$$(a, b)^o = (a, b)$$

12c

$$[a, b]^o = (a, b)$$

12d

$$(a, b]^o = (a, b)$$

12e

$$[a, \infty)^o = (a, \infty)$$

12e

$$(-\infty, b)^o = (-\infty, b)$$

13a Vypočtete limity po všech přímkách a řekněte, co z výsledku plyne pro limitu funkce dvou proměnných

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

13b

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

13c

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

14a Pro funkci f a bod $a = (-1, 3)$

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y}$$

- (a) Vypočtete derivaci ve směru $h = (h_1, h_2)$ v bodě a .
- (b) Vypočtete gradient $\nabla f(a)$ v bodě a .
- (c) Co můžete na základě vypočteného říct o diferenciálu L funkce f v bodě a ?
- (d) Pro vektor $h = (h_1, h_2)$ a funkci φ

$$\varphi(t) = f(a + th)$$

vypočtete $\varphi(t)$, derivaci $\varphi'(t)$ a její hodnotu v bodě nula: $\varphi'(0)$.

14b

$$a = (0, 0), \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

15. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě a

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3xy}{x + 2y}, \quad a = (3, -1)$$