Požadavky k ústní části zkoušky z Matematické analýzy 3
20. prosince 2024

Ke zkoušce si můžete přinést jako tahák až pět důkazů. Seznam tvrzení, jejichž důkazy jste si přinesli, odevzdáte na začátku písemky. Přinesené důkazy pak můžete používat při zkoušení, které bude probíhat u tabule a kde budete důkaz vysvětlovat přítomným zkoušejícím a studentům.

1. **Typy matematických důkazů.** Ke každému z typů: sporem, matematickou indukcí, nepřímý důkaz, vyberte jedno tvrzení a na jeho důkazu demonstrujte tento typ důkazu. Tvrzení nemusí být probírané v an3, může být například z algebry nebo z minulých analýz.

2. **Posloupnosti a řady funkcí.** Definice bodové a stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí na intervalu. Kritérium stejnoměrné konvergence. Příklad posloupnosti funkcí, která konverguje bodově, ale nikoliv stejnoměrně.

   Věta o spojitosti stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí i s důkazem. Příklad posloupnosti spojitých funkcí s nespojitou bodovou limitou.

   Mocninné řady, základní pojmy (člen, střed, poloměr konvergence). Odvození vzorce pro poloměr konvergence. Taylorovy řady jako příklady mocninných řad, Taylorovy řady funkcí sinus, kosinus, exponenciální, jejich poloměr konvergence.

   Věta o derivování mocninné řady člen po členu. Použití věty na sečtení řady.

3. **Metrické prostory.** Definice metrického prostoru. Příklady metrických prostorů, metriky odvozené od normy.

   Otevřené a uzavřené množiny, věta o sjednocení a průniku těchto množin i s důkazem. Uzávěr a vnitřek množiny. Vysvětlení na příkladech intervalů, prázdné množiny, množiny racionálních čísel (v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$.

   Definice konvergentní posloupnosti. Charakterizace uzavřených množin pomocí konvergentních posloupností (věta i s důkazem).

4. **Spojitá zobrazení na metrických prostorech.** Definice spojité funkce na metrickém prostoru. Definice kompaktní množiny. Věta o existenci extrémů spojité funkce na kompaktní množině i s důkazem.

5. **Funkce více proměnných.** Derivace ve směru, parciální derivace. Vlastnosti derivace ve směru (derivace součtu, součinu, podílu).

   Definice limity funkce více proměnných. Nutná podmínka existence limity. Příklady funkce, která má limity po všech přímkách, ale nemá limitu.

   Definice totálního diferenciálu, funkce diferencovatelné v bodě. Věta o spojitosti diferencovatelné funkce i s důkazem. Věta o diferencovatelnosti funkce více proměnných i s důkazem.

   Taylorův polynom funkce více proměnných.

   Definice lokálního extrému funkce více proměnných. Nutná podmínka existence extrému.

   Druhý diferenciál, Hessova matice. Postačující podmínka lokálního extrému funkce více proměnných. Příklad funkce s lokálním minimem, funkce s lokálním maximem a funkce se sedlovým bodem.

   Derivace složené funkce (řetízkové pravidlo) a jeho aplikace na funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ použitá při důkazu věty o implicitní funkci.

   Definice vázaného extrému. Věta o implicitně zadané funkci i s důkazem. Věta o nutné podmínce vázaného extrému i s důkazem.

6. **Dvojný a dvojnásobný integrál.** Definice dvojného a dvojnásobného integrálu na obdélníku. Věta o existenci dvojného a dvojnásobného integrálu pro funkci spojitou na uzávěru obdélníku i s důkazem. Příklad funkce, která není integrovatelná na vhodně zvoleném obdélníku.

   Fubiniova věta pro funkci spojitou na uzávěru obdélníku (bez důkazu).

   Množinová algebra, definice obsahu rovinných obrazců.

   Výpočet integrálu v polárních souřadnicích, použití polárních souřadnic na výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$.