Obsah rovinných obrazců

text pro studenty FP TUL

18. prosince 2024

Martina Šimůnková

Definice množinové algebry. Nechť X je množina, A množina jejích podmnožin. Dvojici (X, A) splňující axiomy (MA1), (MA2) nazýváme množinovou algebrou.

(MA1) $(\forall M, N \in A)(M \cup N \in A)$

(MA2) $(\forall M \in A)(X \setminus M \in A)$

Příklady.

1. Nechť $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, A je množina všech podmnožin A.

   Pak (X, A) je množinová algebra.

2. Nechť $X = \mathbb{N}$, A je množina všech konečných podmnožin množiny X.

   Pak není splněn axiom (MA2), proto (X, A) není množinová algebra.

3. Nechť $X = \mathbb{N}$, A je množina všech konečných podmnožin množiny X a jejich doplňků. Tj. $M \in A$ právě když je M konečná množina, nebo je $\mathbb{N} \setminus M$ konečná množina.

   Pak (X, A) je množinová algebra.

4. Nechť $X = [0, 1) \times [0, 1)$. Množinu $I \subseteq X$ nazveme intervalem, pokud existují $0 \leq a \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq d \leq 1$ takové, že $I = [a, b) \times [c, d)$. Nechť A je množina, jejíž prvky jsou sjednocení konečného množství intervalů. Tj. $M \in A$ právě když existují intervaly I_k pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $M = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$.

   Pak je (X, A) množinová algebra.

Vlastnosti množinové algebry. Nechť (X, A) je množinová algebra. Pak platí

1. $(\forall M, N \in A)(M \cap N \in A)$

   Návod: z de Morganova vzorce $X \setminus (M \cap N) = (X \setminus M) \cup (X \setminus N)$ vyjádřete $M \cap N = X \setminus ((X \setminus M) \cup (X \setminus N))$.

2. $(\forall M, N \in A)(M \setminus N \in A)$

   Návod: dokažte a použijte vztah $M \setminus N = M \cap (X \setminus N)$.

3. Pokud je $A \neq \emptyset$, pak $\emptyset \in A$ a $X \in A$.

   Návod: $\emptyset = A \setminus A$, $X = X \setminus \emptyset$.

Definice obsahu. Nechť $X = [0,1) \times [0,1)$, nechť (X, A) je množinová algebra a nechť $S : A \to [0, \infty)$ je zobrazení splňující (S1), (S2). Pak trojici (X, A, S) budeme nazývat prostorem s obsahem, množiny $M \in A$ měřitelnými množinami a $S(M)$ obsahem množiny M.

(S1) Je-li $I = [a,b) \times [c,d) \neq \emptyset$, $I \subseteq X$, pak je $I \in A$ a $S(I) = (b-a)(d-c)$

Tj. obdélníky jsou měřitelné množiny a jejich obsah je shodný s geometrickým obsahem.

(S2) $(\forall M, N \in A, M \cap N = \emptyset)(S(M \cup N) = S(M) + S(N)$

Tj. obsah sjednocení dvou disjunktních množin je roven součtu obsahů těchto množin.

Vlastnosti obsahu.

1. $(\forall M, N \in A)(M \subseteq N \Rightarrow S(M) \leq S(N)$

   Návod: vyjádřete množinu N jako disjunktní sjednocení:
   $N = M \cup (N \setminus M)$.

2. $(\forall M, N \in A)(S(M \cup N) + S(M \cap N) = S(M) + S(N)$

   Návod: použijte disjunktní sjednocení:
   $M \cup N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M) \cup (M \cap N)$, $M = (M \setminus N) \cup (M \cap N)$, $N = (N \setminus M) \cup (M \cap N)$.

3. Nechť I_k pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou intervaly. Nechť pro $k \neq l$ platí $I_k \cap I_l = \emptyset$. Nechť $M \in A$, $M \supseteq \cup_{k=1}^{n} I_k$.

   Pak je $(M) \geq \sum_{k=1}^{n} S(I_k)$.

4. Nechť $M \in A$.

   Pak je

$$S(M) \geq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} S(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \subseteq M, (\forall l,k)(I_k \cap I_l = \emptyset) \right\}$$

5. Nechť I_k pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou intervaly. Nechť $M \in A$, $M \subseteq \cup_{k=1}^{n} I_k$.

   Pak je $(M) \leq \sum_{k=1}^{n} S(I_k)$.

6. Nechť $M \in A$.

   Pak je

$$S(M) \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} S(I_k) : M \subseteq \cup_{k=1}^{n} I_k \right\}$$

Definice Jordanovské měřitelnosti. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je omezená množina. Číslo $jm_*(M)$ nazýváme vnitřní Jordanovou mírou množiny M, číslo $jm^*(M)$ nazýváme vnější Jordanovou mírou množiny M.

$$\begin{aligned} jm_*(M) &:= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} S(I_k) : \cup_{k=1}^{n} I_k \subseteq M, (\forall l,k)(I_k \cap I_l = \emptyset) \right\} \\ jm^*(M) &:= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} S(I_k) : M \subseteq \cup_{k=1}^{n} I_k \right\} \end{aligned}$$

Množinu M nazveme Jordanovsky měřitelnou, pokud platí $jm_*(M) = jm^*(M)$.

Lemma o Jordanově míře. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $M \subseteq I$. Pak platí

$$jm_*(M) = S(I) - jm^*(I \setminus M)$$

Důkaz lemma je v prezentaci.

Věta (Caratheodoryova podmínka). Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval, $M \subseteq I$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní. Podmínku (ii) nazýváme Caratheodorzovou podmínkou.

(i) Množina M je Jordanovsky měřitelná.

(ii)
$$jm^*(M) + jm^*(I \setminus M) = S(I)$$

Důkaz.
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Pro Jordanovsky měřitelnou množinu M platí
$$jm_*(M) = jm^*(M)$$
Z lemma o Jordanově míře plyne
$$jm_*(M) = S(I) - jm^*(I \setminus M)$$
Odtud dostaneme
$$jm^*(M) = S(I) - jm^*(I \setminus M)$$
a po úpravě dostaneme Caratheodoryovu podmínku.
(ii) $\Rightarrow$ (i)
Caratheodirzovu podmínku upravíme na
$$jm^*(M) = S(I) - jm^*(I \setminus M)$$
pravou stranu upravíme pomocí lemma o Jordanově míře a dostaneme
$$jm_*(M) = jm^*(M)$$
odkud plyne, že M je Jordanovsky měřitelná.

Věta o systému Jordanovsky měřitelných množin. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je interval. Nechť
$$A := \{M \subseteq I : jm_*(M) = jm^*(M)\}$$
Pak (I, A) je množinová algebra.

Důkaz.
Vlastnost (MA1) plyne z následujícího lemma.
Vlastnost (MA2) plyne z Caratheodoryovy podmínky.

Lemma. Omezená množina $M \subset I$ je Jordanovsky měřitelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje systém $\{I_k\}_{k=1}^n$, $\{J_k\}_{k=1}^m$, takových, že platí
$$\cup_{k=1}^n I_k \subset M \subset (\cup_{k=1}^n I_k) \cup (\cup_{k=1}^m J_k), \qquad \sum_{k=1}^m S(J_k) < \varepsilon$$

Důkaz lemma je v prezentaci.