

Náročné úlohy z PAN3/KAN3

11. září 2026

Použití jazykových modelů (LLM) při práci na těchto úlohách je legitimní za předpokladu, že je použijete k pochopení úlohy a jejího řešení a podělíte se o svoje zkušenosti s použitím LLM. Samotné vyřešení úlohy pomocí LLM dostačující není.

V průběhu semestru mohou být do souboru přidány další úlohy.

1. Uvažujte posloupnost funkcí $f_n(x) = x \cdot e^{-nx^2}$. Cíl následující úlohy je prověřit vaše znalosti stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí a ilustrovat předpoklady věty o záměně limity a derivace. Při ověřování supremového kritéria si zopakujete hledání extrémů funkce jedné proměnné.
 - (a) Najděte bodovou limitu $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
 - (b) Pomocí supremového kritéria zjistěte, zda posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně.
 - (c) Určete, zda je funkce f spojitá. Plyne odtud něco o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$?
 - (d) Vypočtěte derivace f'_n .
 - (e) Najděte bodovou limitu $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.
 - (f) Pomocí supremového kritéria zjistěte, zda posloupnost $\{f'_n\}$ konverguje stejnoměrně.
 - (g) Určete, zda je funkce g spojitá. Plyne odtud něco o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f'_n\}$?
 - (h) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost: $g(x) = f'(x)$

2. Ukažte, že funkce f má v nule derivace všech řádů a platí $f^{(n)}(0) = 0$. Dále napište Taylorovu řadu funkce f v bodě nula, určete její součet $T(x)$ a ukažte, že se nerovná $T \neq f$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

3. Pro funkci f

$$f(x) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Zjistěte, zda je f spojitá v bodě nula.
 - Vypočtěte parciální derivace funkce f prvního řádu na souřadných osách (tedy v bodech $(x, 0)$, $(0, y)$).
 - Vypočtěte smíšené parciální derivace funkce f druhého řádu v bodě nula.
 - Napište větu o záměnnosti smíšených derivací a určete, co z této věty a z výsledku (c) plyne pro spojitost parciálních derivací druhého řádu funkce f .
4. Vypočtěte následující dvojnásobné integrály. Určete, zda integrovaná funkce splňuje na integračním oboru předpoklady Fubiniovy věty a případně, který předpoklad není splněný.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$$

5. Vypočtěte následující dvojnásobné integrály pro $\varepsilon \in (0, 1)$. Dále ověřte platnost předpokladů Fubiniovy věty a zjistěte, zda platí tvrzení Fubiniovy věty.

$$\int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy, \quad \int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$$