

Úvod do posloupností a řad funkcí: Příprava a zopakování

Pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková

ve spolupráci s jazykovým modelem Gemini, model 3.6 thinking

11. září 2026

Vítáme vás u tématu **posloupností a řad funkcí a jejich konvergence**. Než se pustíme do zkoumání toho, jak se chová celá posloupnost křivek v rovině, kdy se $n \rightarrow \infty$, potřebujeme mít pevný základ ve dvou klíčových oblastech:

1. **Práce s grafy funkcí** (smršťování/protažení při vnitřní lineární substituci, ořezávání při práci s minimem a maximem).
2. **Výpočet limit posloupností reálných čísel závislých na parametru.**
3. **Geometrická řada a její součet**

Didaktická poznámka: Při vyšetřování bodové limity posloupnosti funkcí $f_n(x)$ si proměnnou x na malou chvíli „zamkneme“ (chováme se k ní jako k pevně zvolenému číslu/parametru). Z výrazu $f_n(x)$ se tak stane obyčejná číselná posloupnost s indexem n .

1 Rozcvička I: Grafy a transformace funkcí

Při analýze posloupností funkcí budeme často načrtávat prvních několik členů (např. pro $n = 1, 2, 5$). K tomu je nezbytné rozumět tomu, jak parametrické zrychlení či transformace mění tvar grafu.

Klíčové koncepty k procvičení:

- **Měřítko na ose x :** Přejít od $g(x)$ ke $g(c \cdot x)$ způsobí c -násobné vodorovné smrštění (pro $c > 1$) nebo protažení (pro $0 < c < 1$).
- **Absolutní hodnota a konstrukce po částech:** Grafy výrazů typu $|1 - x|$, $1 - |1 - x|$ můžeme konstruovat postupně, pokud víme, co se s grafem stane po vynásobení nebo sečtení s konstantou.
- **Ořezání grafu:** Grafy výrazů $\max\{f(x), 0\}$ nebo $\min\{f(x), 1\}$ vzniknou oříznutím grafu funkce f .
- **Mocniny a goniometrie na intervalech:** Chování x^n či $\sin^n(x)$ pro $x \in [-1, 1]$.

Příklady na procvičení grafů

Příklad 1.1 (Mocniny a goniometrie). Načrtněte do jednoho obrázku grafy následujících funkcí na zadaných intervalech:

- a) $y = x$, $y = x^2$ a $y = x^5$ na intervalu $[0, 1]$.
- b) $y = \sin(x)$, $y = \sin^2(x)$ a $y = \sin^5(x)$ na intervalu $[0, \pi]$.

Cíl úlohy: Uvědomit si, co dělá umocňování s hodnotami z intervalu $(0, 1)$ a jak se mění tvar křivky kolem bodů 0 a 1. (Příprava pro úlohy $f_n(x) = x^n$ a $f_n(x) = \sin^n(x)$).

Příklad 1.2 (Lomené a ořezané funkce). Sestrojte krok za krokem grafy následujících funkcí na $\mathbb{R}$:

- $g_1(x) = |1 - x|$
- $g_2(x) = 1 - |1 - x|$
- $g_3(x) = \max\{1 - |1 - x|, 0\}$

Cíl úlohy: Procvičit grafy s absolutní hodnotou a operaci $\max / \min$, která graf „ořeže“. (Příprava pro úlohy typu $f_n(x) = |1 - nx|$ či $f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}$).

Příklad 1.3 (Chování cyklometrických a exponenciálních funkcí). Načrtněte graf funkce $y = \arctg(x)$. Vyznačte v obrázku asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$. Jak se liší graf $y = \arctg(x)$ od grafu $y = \arctg(10x)$?

Cíl úlohy: Vizualizovat si, jak se při změně argumentu mění rychlost přechodu mezi limity v nekonečnách. (Příprava pro úlohy $f_n(x) = \arctg(nx)$ a $f_n(x) = \arctg(x/n)$).

2 Rozcvička II: Limity posloupností s parametrem

Nyní se podíváme na početní část. Při hledání limitní funkce $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ počítáme limitu posloupnosti vzhledem k indexu n , přičemž proměnnou x bereme jako konstantní parametr. Výsledek se často výrazně liší podle toho, v jakém oboru se parametr x nachází.

Klíčové věty k zopakování:

- **Limita geometrické posloupnosti:** $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ v závislosti na $q \in \mathbb{R}$.
- **Věta o limitě monotónní posloupnosti:** Je-li posloupnost omezená a monotónní, má konečnou limitu.

Příklady na procvičení limit posloupností

Příklad 2.1 (Geometrická limita s parametrem). Spočítejte limitu posloupnosti $a_n = q^n$ v závislosti na reálném parametru $q \in \mathbb{R}$. Výsledek zapište přehledně pro jednotlivé podintervaly parametru q .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} ? & \text{pro } |q| < 1 \\ ? & \text{pro } q = 1 \\ ? & \text{pro } q > 1 \end{cases}$$

Cíl úlohy: Základní kámen pro bodové limity mocninných posloupností $f_n(x) = x^n$ nebo $f_n(x) = \sin^n(x)$.

Příklad 2.2 (Exponenciální pokles). Pro libovolné pevné reálné číslo $c \in \mathbb{R}$ určete limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \cdot c}$$

Rozlišujte případy $c > 0$, $c = 0$ a $c < 0$.

Cíl úlohy: Procvičit chování exponenciály v závislosti na znaménku exponentu. (Příprava pro $f_n(x) = \exp(nx)$ a $f_n(x) = \exp(-nx^2)$).

Příklad 2.3 (Limita cyklometrické posloupnosti). Pro pevně zvolené $c \in \mathbb{R}$ vypočítejte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(n \cdot c)$$

Cíl úlohy: Práce s vlastností $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \arctg(t) = \pm \frac{\pi}{2}$. (Příprava pro úlohu $f_n(x) = \arctg(nx)$).

Příklad 2.4 (Racionální výraz s parametrem). Určete limitu posloupnosti b_n s reálným parametrem $c \in \mathbb{R}$:

$$b_n = \frac{n \cdot c}{1 + n^2 \cdot c^2}$$

1. Vypočítejte limitu pro $c = 0$.
2. Vypočítejte limitu pro $c \neq 0$ (vytknutím nejvyšší mocniny n).

Cíl úlohy: Ukázat, že i když je výsledek pro všechna $c \in \mathbb{R}$ stejný (nula), rychlost konvergence k této nule se pro různé hodnoty parametru zásadně liší. (Příprava pro úlohu $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$).

3 Rozcvička III: Geometrická řada a její součet

Zopakujte si, že geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

konverguje pro hodnoty kvocientu $q \in (-1, 1)$ a že má součet

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad \text{pro } q \in (-1, 1)$$

4 Propojení: Přejít k analýze posloupností funkcí

Jakmile si tyto koncepty osvojíte, jste plně vybaveni pro řešení hlavního pracovního listu.. V něm už jen nahradíte parametr c proměnnou x :

- Posloupnost $a_n = q^n$ z Příkladu 2.1 se stane funkcí $f_n(x) = x^n$.
- Posloupnost z Příkladu 2.4 se stane funkcí $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

Přejeme vám spoustu zábavy při objevování toho, jak se z posloupností hladkých křivek mohou v limitě zrodit funkce s nespojitostmi či skoky.

5 Samostatné cvičení: Neřešené úlohy

Na závěr přikládáme několik standardních úloh na procvičení základních dovedností bez přítomnosti parametru.

Grafy elementárních funkcí

Příklad 5.1 (Transformace grafů bez parametru). Načrtněte grafy následujících funkcí a určete jejich definiční obor a obor hodnot:

1. $h_1(x) = |x - 2| - 1$
2. $h_2(x) = \min\{|x - 2| - 1, 1\}$ (můžete do jednoho obrázku s grafem h_1)
3. do jednoho obrázku: $h_3(x) = \arctg(x/3)$, $h_4(x) = \arctg(3x)$
4. $h_5(x) = \exp(-3x)$ do jednoho obrázku s grafem $\exp(-x)$
5. $h_6(x) = \exp(-3x^2)$

Limity číselných posloupností

Příklad 5.2 (Výpočet limit bez parametru). Vypočítejte následující limity posloupností pro $n \rightarrow \infty$. U každého kroku si uvědomte, jakou úpravu nebo vzorec používáte:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{5n^2 + 4}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(-n^2) + \arctg(3/n)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.9^n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} 1.1^n$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-4n^2)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(-n) + \exp(n)}{\exp(n^2)}$

Příklad 5.3 (Geometrická řada). Určete, pro která x konverguje řada a pro tato x vypočtete součet řady

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n(x)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx)$