

Posloupnosti funkcí – příklady na bodovou konvergenci

Pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková

ve spolupráci s jazykovým modelem Gemini

11. září 2026

Obsah

1	Zadání konkrétních funkcí	1
2	Analýza a grafické znázornění	2
3	Analýza spojitosti limitní funkce	3
4	Záměna limit a derivací	3
4.1	Záměna pořadí limit	3
4.2	Záměna limity a derivace	3
5	Řešená úloha 2a	3
5.1	Vizuální průzkum	3
5.2	Výpočet bodové limity	4
5.3	Graf limitní funkce	5
5.4	Praktická ukázka definice limity	5

1 Zadání konkrétních funkcí

Pro každou z níže uvedených posloupností funkcí (f_n) proveďte analýzu popsanou v dalších dvou kapitolách. Cílem je pochopit, jak se funkce v posloupnosti chovají, když se n blíží k nekonečnu.

V závěrečné kapitole najdete jednu úlohu vyřešenou.

a) $f_n(x) = x^n$

b) $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$

c) $f_n(x) = \arctg(nx)$

- d) $f_n(x) = \arctg(x/n)$
- e) $f_n(x) = \exp(nx)$
- f) $f_n(x) = \exp(-nx^2)$
- g) $f_n(x) = |1 - nx|$
- h) $f_n(x) = 1 - |1 - nx|$
- i) $f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}$
- j) $f_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}$
- k) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$
- l) $f_n(x) = \sin^n(x)$

2 Analýza a grafické znázornění

U každé zadané posloupnosti funkcí f_n postupujte v těchto krocích:

1. Vizuální průzkum

Napište předpis prvních několika členů posloupnosti – doporučuji zvolit například $n = 1, 2, 5$. Poté do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy těchto funkcí (tj. například grafy funkcí f_1, f_2, f_5).

2. Výpočet bodové limity

Zamyslete se, co se děje s funkční hodnotou $f_n(x)$ pro **pevně zvolené** x , když $n \rightarrow \infty$.

- Určete **obor konvergence** (D), tedy množinu všech x , pro která existuje konečná limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- Pro každé $x \in D$ tuto limitu vypočítejte a запиšte předpis **limitní funkce** f .

Nápověda: U mnoha zadaných posloupností funkcí je posloupnost hodnot ($f_n(x)$) pro pevné x monotónní (nerostoucí nebo neklesající). Připomeňte si větu o limitě monotónní posloupnosti: je-li taková posloupnost omezená, pak je konvergentní a její limita je rovna jejímu supremu (pro neklesající posloupnost) nebo infimu (pro nerostoucí posloupnost).

3. Graf limitní funkce

Do stejného obrázku načrtněte graf výsledné limitní funkce f .

4. Praktická ukázka definice limity

- a) Vyberte si na ose x jeden bod a z oboru konvergence D a na ose y vyznačte $f(a)$.
- b) Na ose y vyznačte malé ε -okolí bodu $f(a)$.
- c) Najděte (odhadem nebo počítaně) takové n_0 , aby hodnota $f_{n_0}(a)$ již ležela ve zvoleném okolí. Pokud graf pro toto n_0 ještě nemáte, dokreslete ho.

3 Analýza spojitosti limitní funkce

Pro každou limitní funkci f z Části 2 určete množinu bodů z oboru konvergence D , ve kterých tato funkce **není** spojitá. Svůj závěr stručně zdůvodněte.

4 Záměna limit a derivací

4.1 Záměna pořadí limit

Vypočtěte a porovnejte následující dvojice limit.

Poznámka: Všimněte si, že limitní funkce f z úloh 2a a 2f, které zde zkoumáte, nebyly spojité ve všech bodech (viz Část 4). Souvisí výsledek této úlohy se spojitostí?

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right) \quad \text{vs.} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right)$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{-nx^2} \right) \quad \text{vs.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} \right)$$

4.2 Záměna limity a derivace

Uvažujte posloupnost funkcí $f_n(x) = x \cdot e^{-nx^2}$.

1. Najděte bodovou limitu $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ a vypočtěte derivaci f' .
2. Vypočtěte derivaci $f'_n(x)$ pro obecné n a najděte bodovou limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.
3. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'$$

5 Řešená úloha 2a

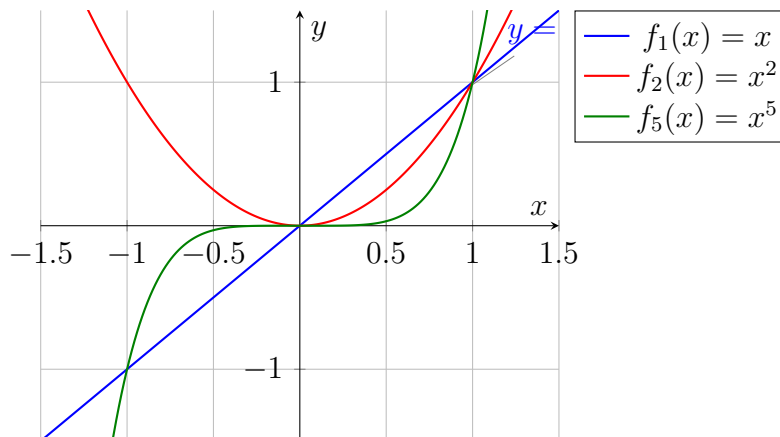
5.1 Vizuální průzkum

Nejprve si napíšeme a načrtneme několik prvních členů posloupnosti, například pro $n = 1, 2, 5$.

- $n = 1$: $f_1(x) = x$ (lineární funkce, přímka)
- $n = 2$: $f_2(x) = x^2$ (kvadratická funkce, parabola)
- $n = 5$: $f_5(x) = x^5$ (mocninná funkce)

Grafické znázornění:

Na grafu vidíme, že pro $x \in (-1, 1)$ se hodnoty $f_n(x)$ s rostoucím n přibližují k nule. V bodě $x = 1$ jsou všechny funkční hodnoty rovny 1.



5.2 Výpočet bodové limity

Nyní určíme limitu $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, tedy limitu $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ pro každé pevně zvolené x . Všimněte si, počítáme limitu geometrické posloupnosti a že musíme rozlišit několik případů:

- **Pro $|x| < 1$ (tedy $x \in (-1, 1)$):**

Limita mocniny, kde základ je v absolutní hodnotě menší než 1, je nula.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

- **Pro $x = 1$:**

Posloupnost funkčních hodnot je konstantní: $(1, 1, 1, \dots)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

- **Pro $x = -1$:**

Získáme posloupnost $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, která osciluje a nemá limitu. Bod tedy nepatří do oboru konvergence.

- **Pro $x > 1$:**

Limita je nevlastní (posloupnost diverguje k ∞). Tyto body tedy nepatří do oboru konvergence.

- **Pro $x < -1$:**

V absolutní hodnotě se členy blíží k $\pm\infty$ (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^n| = \infty$) a zároveň členy střídají znaménka (pro sudé n je $x^n > 0$ zatímco pro liché n je $x^n < 0$). Limita proto neexistuje a tyto body nepatří do oboru konvergence.

Závěr:

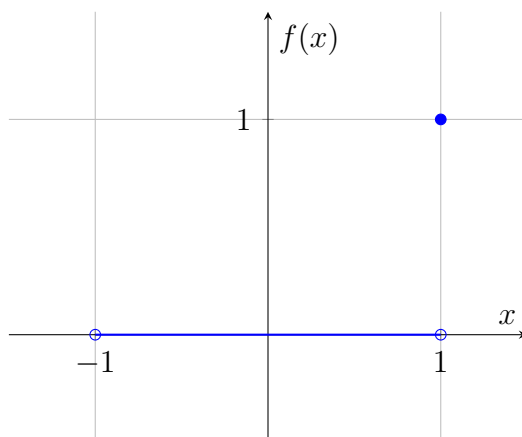
- **Obor konvergence (D):** Posloupnost konverguje pro $x \in (-1, 1]$.

- **Limitní funkce (f):** Předpis limitní funkce je:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

5.3 Graf limitní funkce

Grafem je úsečka na ose x v intervalu $(-1, 1)$ (bez krajních bodů) a samostatný bod v souřadnicích $[1, 1]$.



Důležitý postřeh: Ačkoliv jsou všechny funkce $f_n(x) = x^n$ spojité na celém svém definičním oboru, jejich bodová limita, funkce $f(x)$, **není spojitá** na svém oboru konvergence. Má bod nespojitosti v $x = 1$.

5.4 Praktická ukázka definice limity

Zvolme si bod z oboru konvergence, například $a = 0.5$.

1. Limitní hodnota v tomto bodě je $f(0.5) = 0$.
2. Zvolme malé okolí této limity, například $\varepsilon = 0.1$. Hledáme tedy hodnoty na ose y v intervalu $(-0.1, 0.1)$.
3. Chceme najít takové n_0 , aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo, že $f_n(0.5)$ leží v tomto okolí. Řešíme tedy nerovnost:

$$\begin{aligned} |f_n(0.5) - f(0.5)| &< 0.1 \\ |0.5^n - 0| &< 0.1 \\ 0.5^n &< 0.1 \end{aligned}$$

Nerovnost zlogaritmujeme:

$$\begin{aligned} n \cdot \ln(0.5) &< \ln(0.1) \\ n &> \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.5)} \approx 3.32 \end{aligned}$$

Musíme tedy zvolit $n_0 = 4$. Pro funkci $f_4(x) = x^4$ a všechny další členy posloupnosti již bude platit, že jejich funkční hodnota v bodě 0.5 je od limitní nuly vzdálena o méně než $\varepsilon = 0.1$.

Ověření: $f_4(0.5) = 0.5^4 = 0.0625$, a $0.0625 < 0.1$.

Na obrázku je ke grafům funkcí dokresleno ε -okolí bodu $f(a)$ a z obrázku je vidět, že $f_5(a)$ v tomto okolí leží.

