

# Posloupnosti funkcí: Bodová a stejnoměrná konvergence

Pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková

ve spolupráci s jazykovým modelem Gemini, model 3.6 thinking

30. září 2026

## Obsah

|          |                                                                                               |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Bodová a stejnoměrná konvergence</b>                                                       | <b>1</b>  |
| 1.1      | Grafické znázornění stejnoměrné konvergence . . . . .                                         | 3         |
| <b>2</b> | <b>Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností</b>                                     | <b>3</b>  |
| 2.1      | Spojítost limitní funkce . . . . .                                                            | 3         |
| 2.1.1    | Souvislost se záměnou limit . . . . .                                                         | 4         |
| 2.1.2    | Řešené příklady k záměně limit . . . . .                                                      | 5         |
| 2.2      | Záměna limity a integrálu . . . . .                                                           | 6         |
| 2.3      | Záměna limity a derivace . . . . .                                                            | 6         |
| 2.3.1    | Souvislost se záměnou limit . . . . .                                                         | 6         |
| <b>3</b> | <b>Jak zjišťovat stejnoměrnou konvergenci</b>                                                 | <b>7</b>  |
| 3.1      | Nutná podmínka (bodová konvergence) . . . . .                                                 | 7         |
| 3.2      | Nutná a postačující podmínka (supremové kritérium) . . . . .                                  | 7         |
| 3.3      | Nutná podmínka stejnoměrné konvergence (spojítost limitní funkce) . . . . .                   | 7         |
| 3.4      | Řešené příklady . . . . .                                                                     | 8         |
| <b>4</b> | <b>Ilustrativní příklady s grafy</b>                                                          | <b>10</b> |
| 4.1      | Příklad 1: Ztráta spojitosti u posloupnosti $f_n(x) = x^n$ . . . . .                          | 10        |
| 4.2      | Příklad 2: Putující hrb $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ . . . . .                             | 10        |
| 4.3      | Příklad 3: Narušení stejnoměrné konvergence v okolí počátku u $f_n(x) = \arctg(nx)$ . . . . . | 11        |
| <b>5</b> | <b>Závěr</b>                                                                                  | <b>12</b> |

---

## 1 Bodová a stejnoměrná konvergence

Při studiu reálných funkcí jedné proměnné se často setkáváme s potřebou aproximovat složitější funkce pomocí posloupnosti jednodušších funkcí (např. polynomů). K tomu je však nutné přesně definovat, co znamená, že posloupnost funkcí konverguje k limitní funkci.

**Definice 1.1** (Posloupnost funkcí). Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}$  je neprázdná množina. Nechť pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  funkce. Posloupnost  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  nazýváme **posloupností funkcí** definovaných na množině  $M$ .

Nejpřirozenějším způsobem konvergence je konvergence v každém bodě samostatně.

**Definice 1.2** (Bodová konvergence). Řekneme, že posloupnost funkcí  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  **konverguje bodově** k funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  na množině  $M$ , jestliže pro každé  $x \in M$  platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Píšeme  $f_n \rightarrow f$  na  $M$ . Funkci  $f$  nazýváme **bodovou limitou** posloupnosti  $(f_n)$ .

Ekvivalentně lze bodovou konvergenci zapsat pomocí kvantifikátorů:

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Všimněme si, že index  $n_0$  v definici bodové konvergence závisí obecně jak na volbě  $\varepsilon$ , tak na konkrétním bodě  $x \in M$ , tj.  $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ .

Hlavním nedostatkem bodové konvergence je, že nezachovává základní analytické vlastnosti funkcí, jako je spojitost, integrovatelnost či derivovatelnost. Limita spojitých funkcí nemusí být spojitá. Z tohoto důvodu zavádíme silnější pojem konvergence.

**Definice 1.3** (Stejnomořná konvergence). Řekneme, že posloupnost funkcí  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  **konverguje stejnoměrně** k funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  na množině  $M$ , jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Píšeme  $f_n \rightrightarrows f$  na  $M$ .

Zde volba indexu  $n_0$  závisí pouze na  $\varepsilon$  a platí pro všechna  $x \in M$  současně ( $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ). Geometricky to znamená, že od indexu  $n_0$  dále leží grafy funkcí  $f_n$  uvnitř  $\varepsilon$ -pásu okolo limitní funkce  $f$ .

**Věta 1.4** (Supremové kritérium stejnoměrné konvergence). *Nechť  $f_n \rightarrow f$  na  $M$ . Označme*

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

*Pak  $f_n \rightrightarrows f$  na  $M$  právě tehdy, když  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .*

*Hlavní myšlenka důkazu.* Ekvivalence v tvrzení věty plyne ze dvou základních vlastností suprema množiny odchylek  $\sigma_n$ :

1.  **$\sigma_n$  je horní závora:** Z definice suprema platí  $|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n$  pro všechna  $x \in M$ . Odtud dostáváme implikaci:

$$\sigma_n < \varepsilon \implies \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

což dokazuje implikaci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0 \implies f_n \rightrightarrows f$  na  $M$ .

2.  **$\sigma_n$  je nejmenší horní závora:** Platí-li  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  pro všechna  $x \in M$ , je číslo  $\varepsilon$  horní závorou množiny odchylek. Protože  $\sigma_n$  je nejmenší horní závora, plyne odtud implikace:

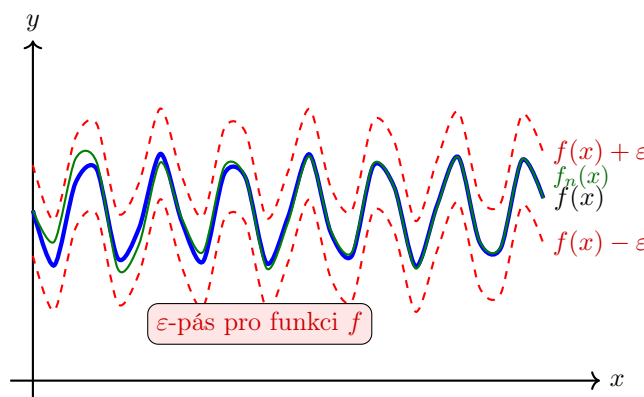
$$(\forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \implies \sigma_n \leq \varepsilon,$$

což dokazuje opačnou implikaci  $f_n \rightrightarrows f$  na  $M \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .

□

## 1.1 Grafické znázornění stejnoměrné konvergence

Následující graf ilustruje limitní funkci  $f$  a její  $\varepsilon$ -okolí. Pro stejnoměrnou konvergenci musí od určitého indexu  $n_0$  ležet grafy všech funkcí  $f_n$  (pro  $n \geq n_0$ ) kompletně uvnitř tohoto červeně vyznačeného pásu.



## 2 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností

Stejnoměrná konvergence je silnější pojem než bodová konvergence, a proto nám zaručuje, že některé důležité vlastnosti funkcí  $f_n$  se přenesou i na limitní funkci  $f$ . Následující věty ilustrují tři z těchto vlastností. První větu uvádíme i s důkazem a budeme ji používat i při řešení příkladů. Další dvě věty uvádíme pro další ilustraci pojmu stejnoměrná konvergence a důkazy vynecháváme.

### 2.1 Spojitost limitní funkce

**Věta 2.1** (spojitost limitní funkce). *Nechť  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí spojitých na intervalu  $I$ , která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci  $f$ . Potom je i funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I$ .*

**Přeformulace a význam:** Tuto větu lze chápat tak, že „stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce“. Bodová konvergence nám spojitost limitní funkce nezaručí. Tato vlastnost je zásadní, protože nám dovoluje pracovat s limitní funkcí s jistotou, že v ní nevzniknou skoky nebo jiné nespojitosti, pokud byly původní funkce spojitě.

*Důkaz.* Chceme dokázat, že funkce  $f$  je spojitá v libovolném bodě  $x_0 \in I$ . Z definice spojitosti musíme ukázat, že pro libovolné  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $x \in I$  splňující  $|x - x_0| < \delta$  platí  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

1. **Využití stejnoměrné konvergence:** Z předpokladu, že  $f_n \rightrightarrows f$  na  $I$ , víme, že k danému  $\varepsilon > 0$  (konkrétně k  $\varepsilon/3 > 0$ ) existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \geq n_0$  a pro **všechna**  $x \in I$  platí:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zvolme jedno takové pevné  $n$ , například  $n = n_0$ . Nerovnost tedy platí i pro funkci  $f_{n_0}$  a pro všechny body z intervalu  $I$ , včetně  $x_0$ :

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{a} \quad |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

2. **Využití spojitosti  $f_{n_0}$ :** Podle předpokladu věty je funkce  $f_{n_0}$  spojitá v bodě  $x_0$ . Z definice její spojitosti tedy k našemu  $\varepsilon/3$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $x \in I$  splňující  $|x - x_0| < \delta$  platí:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3. **Spojení nerovností:** Nyní můžeme odhadnout velikost výrazu  $|f(x) - f(x_0)|$  pro  $x$  z okolí bodu  $x_0$  daného tímto  $\delta$ . Použijeme trojúhelníkovou nerovnost:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon/3 \text{ (z 1.)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{< \varepsilon/3 \text{ (z 2.)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon/3 \text{ (z 1.)}} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že pro libovolné  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro  $|x - x_0| < \delta$  platí  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Funkce  $f$  je tedy spojitá v bodě  $x_0$ . Protože  $x_0$  byl libovolný bod z intervalu  $I$ , je funkce  $f$  spojitá na celém intervalu  $I$ . Tím je důkaz hotov.  $\square$

*Poznámka 2.2.* Podle Věty 2.1 je stejnoměrná konvergence  $f_n \rightrightarrows f$  v okolí bodu  $x_0$  postačující podmínkou pro to, aby byla limitní funkce  $f$  v bodě  $x_0$  spojitá.

Pokud není limitní funkce  $f$  v bodě  $x_0$  spojitá a funkce  $f_n$  spojitě jsou, pak posloupnost  $(f_n)_{n=1}^\infty$  nemůže konvergovat stejnoměrně na žádném okolí bodu  $x_0$  (viz Příklad 4.1 pro  $x^n$  v bodě  $x_0 = 1$ ).

### 2.1.1 Souvislost se záměnou limit

Uvažujme posloupnost funkcí  $(f_n)$  spojitých v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  a bodovou limitu  $f$  této posloupnosti na okolí bodu  $x_0$ . Budeme zkoumat, za jakých podmínek je zaměnitelné pořadí limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right). \quad (1)$$

Připomeňme, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$  právě když má v tomto bodě limitu rovnou funkční hodnotě. Odtud plyne:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0).$$

Dosazením do levé strany (1) dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0).$$

Pravá strana je bodová limita v bodě  $x_0$ , tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Pro úpravu pravé strany (1) využijeme definici bodové limity  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Požadavek na zaměnitelnost limit, tj. rovnost (1) je tedy ekvivalentní vztahu:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Tento vztah je nutnou a postačující podmínkou spojitosti limitní funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Závěr:** Za předpokladu spojitosti funkcí  $f_n$  v bodě  $x_0$  rovnost (1) platí právě když je bodová limita posloupnosti funkcí  $(f_n)$  v bodě  $x_0$  spojitá. Pokud (1) neplatí, plyne z věty 2.1, že posloupnost  $(f_n)$  na žádném okolí bodu  $x_0$  nekonverguje stejnoměrně.

### 2.1.2 Řešené příklady k záměně limit

Následující příklady ukazují, jak lze předchozí závěr využít k testování stejnoměrné konvergence.

**Příklad 2.3** (Dvojné limity se nerovnají). Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí  $f_n(x) = x^n$  na levém okolí bodu 1 (tj. pro  $x \rightarrow 1^-$ ) pomocí záměny limit.

**Řešení:** Spočítáme obě dvojné limity postupně v obou pořadích:

1. **Nejprve limitujeme po  $x$ , poté po  $n$ :** Pro pevně zvolené  $n \in \mathbb{N}$  je funkce  $f_n(x) = x^n$  spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , tedy:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1^n = 1.$$

Následně provedeme limitní přechod pro  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

2. **Nejprve limitujeme po  $n$ , poté po  $x$ :** Pro pevné  $x \in (0, 1)$  určujeme bodovou limitu posloupnosti  $f_n(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

Následně provedeme limitní přechod pro  $x \rightarrow 1^-$  z výsledné limitní funkce  $f(x) = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0.$$

**Závěr:** Porovnáním obou výsledků dostáváme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Jelikož se obě dvojné limity nerovnají, není splněna nutná podmínka věty o záměně limit. Z obměněného tvrzení plyne, že posloupnost  $f_n(x) = x^n$  **nekonverguje stejnoměrně** na žádném levém okolí bodu 1 (např. na intervalu  $(0, 1)$ ).

**Příklad 2.4** (Dvojné limity se rovnají). Vyšetřete chování dvojných limit pro posloupnost funkcí  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  v bodě  $x_0 = 0$ .

**Řešení:** Spočítáme obě dvojné limity pro  $x \rightarrow 0$  a  $n \rightarrow \infty$ :

1. **Nejprve limitujeme po  $x$ , poté po  $n$ :** Pro libovolné pevné  $n \in \mathbb{N}$  vypočteme limitu pro  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{n \cdot 0}{1+0} = 0.$$

Následně provedeme limitní přechod pro  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{1+n^2x^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

2. **Nejprve limitujeme po  $n$ , poté po  $x$ :** Nejprve určíme bodovou limitu pro pevné  $x \in \mathbb{R}$ :

- Pro  $x = 0$  je  $f_n(0) = 0$ , tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ .
- Pro  $x \neq 0$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$  (jelikož jmenovatel roste jako  $n^2$ , zatímco čítec pouze jako  $n$ ).

Bodová limitní funkce je tedy  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Nyní spočítáme limitu pro  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

**Závěr:** V tomto případě platí rovnost obou dvojných limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Z rovnosti dvojných limit však **nelze nic usoudit** o stejnoměrné konvergenci. Platnost záměny limit představuje pro stejnoměrnou konvergenci pouze **nutnou, nikoli postačující podmínku**.

V kapitole 4 (Ilustrativní příklady s grafy, viz část 4.2) je ukázáno, že tato posloupnost na okolí nuly nekonverguje stejnoměrně (lokální maxima funkcí v bodech  $x_n = \frac{1}{n}$  mají konstantní výšku  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ , což brání stejnoměrné konvergenci k nulové funkci).

## 2.2 Záměna limity a integrálu

**Věta 2.5.** *Nechť  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí integrovatelných na intervalu  $[a, b]$ , která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci  $f$ . Potom je i funkce  $f$  integrovatelná na  $[a, b]$  a platí:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Přeformulace a význam:** Věta říká, že při stejnoměrné konvergenci můžeme vyměnit pořadí operátorů limity a integrálu. Tedy limita integrálů je rovna integrálu z limity. To nám extrémně zjednodušuje výpočty, protože často je mnohem snazší zintegrovat již zlimitovanou, a tedy jednodušší, funkci  $f$  než počítat integrály složitých funkcí  $f_n$  a z výsledku pak dělat limitu.

## 2.3 Záměna limity a derivace

**Věta 2.6.** *Nechť  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu  $I$  vlastní derivaci. Nechť dále platí:*

1. *Posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje alespoň v jednom bodě  $x_0 \in I$ .*
2. *Posloupnost derivací  $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje stejnoměrně na  $I$  k funkci  $g$ .*

*Potom posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje stejnoměrně na  $I$  k nějaké funkci  $f$ , která má na  $I$  derivaci, a platí  $f' = g$ . Tedy:*

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

**Přeformulace a význam:** Podobně jako u integrálu, i zde můžeme za určitých podmínek zaměnit pořadí limity a derivace. Podmínky jsou zde ale přísnější: nestačí stejnoměrná konvergence původní posloupnosti  $f_n$ , ale musíme požadovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti *derivací*  $f'_n$ . Věta nám pak zaručuje, že derivace limitní funkce je to samé, co limita posloupnosti derivací.

### 2.3.1 Souvislost se záměnou limit

Derivace funkce v bodě  $x_0$  je z definice sama o sobě limitou diferenčního podílu:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vyjádříme-li obě strany rovnosti ze záměny limity a derivace pomocí definice derivace, získáme:

- **Limita z derivací (pravá strana):**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right).$$

- **Derivace limity (levá strana):** Pro limitní funkci  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  platí:

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Definujeme-li pomocnou posloupnost diferenčních podílů  $g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ , přechází vztah pro záměnu limity a derivace do tvaru:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g_n(x) \right).$$

Otázka zaměnitelnosti limity a derivace je tedy přímou aplikací zaměnitelnosti dvou limitních přechodů (limity podle  $n$  a limity podle  $x$ ), jak byla popsána v podsekcí 5.1.1. K tomu, aby byla tato záměna korektní, je nutné zaručit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti diferenčních podílů  $g_n(x)$ , což v praxi zajišťuje předpoklad stejnoměrné konvergence posloupnosti derivací  $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ .

Větu 2.6 tedy dokážeme pomocí věty 2.1 a Lagrangeovy věty o střední hodnotě, která nám umožní vyjádřit diferenční podíl pomocí derivace.

### 3 Jak zjišťovat stejnoměrnou konvergenci

Zatímco bodovou konvergenci ověříme „jednoduše“ výpočtem limity posloupnosti  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  pro pevné  $x$ , pro stejnoměrnou konvergenci potřebujeme silnější nástroje. Následující věty jsou klíčové.

#### 3.1 Nutná podmínka (bodová konvergence)

Z definice je zřejmé, že pokud posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  konverguje k  $f$  na  $M$  stejnoměrně, pak k ní na  $M$  konverguje i bodově. Pokud tedy posloupnost nekonverguje bodově, nemůže konvergovat ani stejnoměrně. Prvním krokem je tedy vždy nalezení bodové limity.

#### 3.2 Nutná a postačující podmínka (supremové kritérium)

Posloupnost funkcí  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  konverguje stejnoměrně k funkci  $f$  na množině  $M$  právě tehdy, když platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

**Přeformulace a význam:** Prakticky to znamená, že pro každé  $n$  najdeme největší „svislou“ vzdálenost mezi grafy funkcí  $f_n$  a  $f$  na celé množině  $M$ . Tuto maximální odchylku označíme

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$$

Konvergence je stejnoměrná právě když má tato posloupnost maximálních odchylek  $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$  nulovou limitu.

#### 3.3 Nutná podmínka stejnoměrné konvergence (spojitost limitní funkce)

**Věta 3.1** (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence). *Nechť  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost funkcí spojitých na intervalu  $I$  (případně na množině  $M \subseteq \mathbb{R}$ ), která na  $I$  konverguje bodově k funkci  $f$ . Je-li limitní funkce  $f$  nespojitá v alespoň jednom bodě  $x_0 \in I$ , pak posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  nekonverguje k  $f$  stejnoměrně na  $I$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem (resp. obměnou Věty 2.1). Předpokládejme, že posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k  $f$  na intervalu  $I$  stejnoměrně. Jelikož jsou všechny funkce  $f_n$  podle předpokladu spojité na  $I$ , podle Věty 2.1 (o spojitosti limitní funkce) musí být i limitní funkce  $f$  spojitá na celém intervalu  $I$ , a tedy i v bodě  $x_0$ .

To je však v rozporu s předpokladem, že funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  nespojitá. Z tohoto sporu plyne, že posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  nemůže na intervalu  $I$  konvergovat stejnoměrně.  $\square$

### 3.4 Řešené příklady

Výše formulované podmínky použijeme ke zjištění, zda zadaná posloupnost funkcí  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje stejnoměrně na zadaném intervalu  $I$ .

1.  $f_n(x) = x - x^n$ ,  $I = [0, 0.9]$

**Řešení:**

- (a) **Bodová limita:** Pro každé  $x \in [0, 0.9]$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ . Bodovou limitou je tedy funkce  $f(x) = x$ .
- (b) **Supremové kritérium:** Zkoumáme odchylku

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |(x - x^n) - x| = x^n$$

Chceme určit supremum  $g_n(x)$  na intervalu  $I$ . Protože je pro každé  $n$  funkce  $g_n$  intervalu  $[0, 0.9]$  rostoucí, nabývá tedy svého maxima v pravém krajním bodě  $x = 0.9$ , a tedy

$$\sigma_n = \sup_{x \in [0, 0.9]} |f_n(x) - f(x)| = g_n(0.9) = 0.9^n.$$

- (c) **Závěr:** Určíme limitu posloupnosti odchylek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0.9^n = 0.$$

Podle supremového kritéria posloupnost funkcí  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje stejnoměrně k funkci  $f(x) = x$  na intervalu  $I = [0, 0.9]$ .

2.  $f_n(x) = x - x^n$ ,  $I = [0, 1]$

**Řešení:**

- (a) **Bodová limita:** Určíme bodovou limitu  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  pro pevně zvolená  $x \in [0, 1]$ :

- Pro  $x \in [0, 1)$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , tedy  $f(x) = x - 0 = x$ .
- Pro  $x = 1$  je  $f_n(1) = 1 - 1^n = 0$ , tedy  $f(1) = 0$ .

Bodovou limitou je funkce:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

- (b) **Supremové kritérium:** Sledujeme velikost odchylky  $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ :

- Pro  $x \in [0, 1)$  platí  $g_n(x) = |(x - x^n) - x| = |-x^n| = x^n$ .
- Pro  $x = 1$  platí  $g_n(1) = |0 - 0| = 0$ .

Funkce  $g_n(x) = x^n$  je na  $[0, 1)$  rostoucí, takže její supremum se nachází v pravém hraničním bodě:

$$\sigma_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1)} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1.$$

(c) **Závěr:** Pro posloupnost maximálních odchylek platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$ . Posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  nekonverguje na  $I = [0, 1]$  stejnoměrně.

(d) **Alternativní postup (využití nespojitosti limitní funkce):** Všechny členy posloupnosti  $f_n(x) = x - x^n$  jsou polynomy, a tedy funkce spojitě na celém intervalu  $I = [0, 1]$ . Bodová limita  $f(x)$  získána v kroku (a) je však v bodě  $x = 1$  nespojitá, neboť:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq 0 = f(1).$$

Podle Věty 3.1 nemůže posloupnost spojitých funkcí stejnoměrně konvergovat k nespojitě limitní funkci. Odtud rovnou plyne, že posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  nekonverguje na  $I = [0, 1]$  stejnoměrně.

3.  $f_n(x) = \arctg(nx)$ ,  $I = (0, \infty)$

**Řešení:**

(a) **Bodová limita:** Pro libovolné pevné  $x > 0$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = +\infty$ , z čehož dostáváme:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(nx) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro všechna } x \in (0, \infty).$$

(b) **Supremové kritérium:** Určíme rozdíl  $f(x) - f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg(nx)$ . Jelikož platí  $\arctg(nx) < \frac{\pi}{2}$  pro všechna  $x > 0$ , je tento rozdíl kladný, a odchylka je přímo

$$g_n(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg(nx)$$

Monotonii odchylky  $g_n$  ověříme buď úvahou o monotonii složené funkce, nebo pomocí derivace:

$$g'_n(x) = -\frac{n}{1 + (nx)^2} < 0 \quad \text{pro všechna } x \in (0, \infty).$$

Derivace je záporná, což znamená, že odchylka  $g_n(x)$  je na intervalu  $(0, \infty)$  klesající. Supremum se proto nachází v levém hraničním bodě pro  $x \rightarrow 0^+$ :

$$\sigma_n = \sup_{x \in (0, \infty)} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg(nx) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg(nx) \right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(c) **Závěr:** Limita posloupnosti maximálních odchylek je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Posloupnost funkcí  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  nekonverguje na  $I = (0, \infty)$  stejnoměrně.

**Poznámka k metodám výpočtu:** K vyšetření stejnoměrné konvergence jsme v příkladech využili dvě různé metody:

1. **Supremové kritérium:** Jedná se o obecný nástroj použitý v příkladech 1, 2 a 3. K výpočtu suprema jsme využili monotonii odchylkové funkce  $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ . K výpočtu suprema jsme pak použili monotonii funkce, ze které plyne, že funkce nabývá suprema v krajním bodě.
2. **Nutná podmínka stejnoměrné konvergence:** V případě nespojitě limitní funkce (Příklad 2) jsme v alternativním postupu použili nutnou podmínku stejnoměrné konvergence. Jelikož jsou funkce  $f_n$  spojitě, ale limitní funkce  $f$  je nespojitá, byla stejnoměrná konvergence přímo vyloučena bez nutnosti výpočtu suprema odchylek.

## 4 Ilustrativní příklady s grafy

Následující příklady ukazují rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí.

### 4.1 Příklad 1: Ztráta spojitosti u posloupnosti $f_n(x) = x^n$

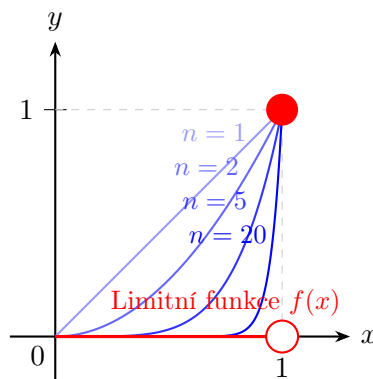
Uvažujme posloupnost funkcí  $f_n(x) = x^n$  na intervalu  $I = [0, 1]$ .

- **Bodová limita:**

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Všechny funkce  $f_n$  jsou spojité na  $[0, 1]$ , avšak limitní funkční hodnota v bodě  $x = 1$  je 1, zatímco limita zleva je 0. Jelikož limitní funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x = 1$ , konvergence nemůže být stejnoměrná na  $[0, 1]$ .

- **Stejneměrnost na podintervalu:** Pokud zvolíme  $K = [0, b]$  pro  $0 < b < 1$ , pak  $\sigma_n = \sup_{x \in [0, b]} |x^n - 0| = b^n \rightarrow 0$ . Na intervalu  $[0, b]$  konvergence je stejnoměrná.



Obrázek 1: Konvergence posloupnosti  $f_n(x) = x^n$  na intervalu  $[0, 1]$ . Přestože jsou všechny členy  $f_n$  spojité, bodová limita  $f(x)$  je nespojitá v  $x = 1$ .

### 4.2 Příklad 2: Putující hrb $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$

Uvažujme posloupnost  $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$  na intervalu  $I = [0, 1]$ .

- **Bodová limita:** Pro  $x = 0$  platí  $f_n(0) = 0$ . Pro  $x > 0$  platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0.$$

Tedy bodová limita je identicky nulová funkce  $f(x) \equiv 0$  na  $[0, 1]$ . Limitní funkce  $f$  je sice spojitá, ale:

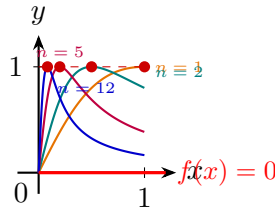
- **Test stejnoměrné konvergence:** Spočtěme extrémální hodnoty  $f_n(x)$  pomocí derivace:

$$f'_n(x) = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \implies x = \frac{1}{n}.$$

Maximum nastává v bodě  $x_n = \frac{1}{n}$  a jeho hodnota je  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1+1} = 1$ . Odtud vypočteme supremum:

$$\sigma_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = 1.$$

Jelikož  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 1 \neq 0$ , posloupnost nekonverguje stejnoměrně k nulové funkci na intervalu  $[0, 1]$ .



Obrázek 2: Graf posloupnosti  $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ . Maximum funkce má pro každé  $n$  hodnotu 1, ale jeho poloha  $x_n = \frac{1}{n}$  se blíží k počátku. Bodová limita je nulová, avšak konvergence není stejnoměrná.

#### 4.3 Příklad 3: Narušení stejnoměrné konvergence v okolí počátku u $f_n(x) = \arctg(nx)$

Uvažujme posloupnost  $f_n(x) = \arctg(nx)$  na intervalu  $I = (0, \infty)$ .

- **Bodová limita:** Pro každé pevné  $x > 0$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx = +\infty$ , z čehož dostáváme:

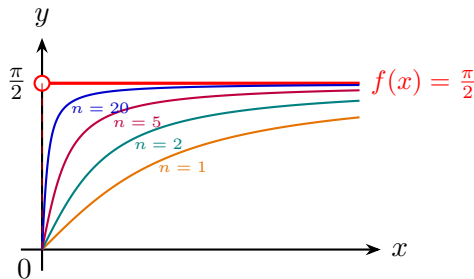
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(nx) = \frac{\pi}{2}.$$

Bodová limita je tedy konstantní funkce  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  na celém intervalu  $(0, \infty)$ .

- **Test stejnoměrné konvergence:** Určíme supremum odchylky  $f_n$  od limitní funkce  $f$ . Jelikož je funkce  $\arctg(nx)$  na  $(0, \infty)$  rostoucí, je rozdíl  $\frac{\pi}{2} - \arctg(nx)$  klesající a svého suprema nabývá v levém krajním bodě  $x \rightarrow 0^+$ :

$$\sigma_n = \sup_{x \in (0, \infty)} \left| \arctg(nx) - \frac{\pi}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg(nx) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{\pi}{2} \neq 0$ , posloupnost nekonverguje stejnoměrně k limitní funkci  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  na intervalu  $(0, \infty)$ .



Obrázek 3: Graf posloupnosti  $f_n(x) = \arctg(nx)$  na intervalu  $(0, \infty)$ . Pro rostoucí  $n$  se funkce strměji zvedá k hodnotě  $\frac{\pi}{2}$ , avšak v libovolně těsném pravém okolí počátku zůstává maximální odchylka od limitní funkce neustále rovna  $\frac{\pi}{2}$ .

## 5 Závěr

Stejněměrná konvergence je důležitým konceptem matematické analýzy, který zaručuje, že limita posloupnosti spojitých funkcí je spojitá funkce a že je možné zaměňovat pořadí limity a integrálu či derivace.

Při ověřování stejnoměrné konvergence v praxi použijeme buď vyšetření suprema odchylky  $\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$  (viz příklady v 3.4) nebo větu 2.1 o spojitosti limitní funkce (viz příklad v 4.1). Zatímco supremové kritérium je obecně použitelný nástroj a je náročnější na výpočet, použití věty je jednodušší, ale můžeme ji použít jen v případě, že limitní funkce není spojitá. Doporučujeme tedy studentům ovládnout oba nástroje.