

Řady funkcí

Pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková

ve spolupráci s jazykovým modelem Gemini, model 3.6 thinking

30. září 2026

Obsah

1	Základní pojmy	1
1.1	Konvergence a stejnoměrná konvergence řady funkcí	1
1.2	Mocninné řady	2
2	Poloměr konvergence mocninných řad	3
2.1	Vzorec pro výpočet poloměru konvergence mocninné řady	4
2.2	Řešené příklady	5
3	Lokální stejnoměrná konvergence mocninných řad	5
4	Spojitosť součtu mocninné řady	6
5	Derivace a integrace mocninné řady člen po členu	7
5.1	Derivace mocninné řady člen po členu	7
5.2	Příklad: Výpočet součtu řady	7
5.3	Integrace mocninné řady člen po členu	8
6	Taylorovy řady	9
6.1	Příklady Taylorových řad	9
6.2	Výpočet poloměrů a oborů konvergence odvozených Taylorových řad	10
6.3	Analytické funkce a jejich vlastnosti	12
6.4	Příklad funkce, která není analytická	15

1 Základní pojmy

1.1 Konvergence a stejnoměrná konvergence řady funkcí

Při studiu funkcí je často výhodné vyjádřit složitější funkci jako součet nekonečné řady jednodušších funkcí (například polynomů). V této kapitole zobecníme pojem číselné řady na posloupnosti a řady funkcí.

Definice 1.1 (Posloupnost a řada funkcí). Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na I .

- Nekonečný součet funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

nazýváme **řadou funkcí** na I .

- Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme k -tý **částečný součet** řady funkcí jako funkci

$$s_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x).$$

Zkoumání konvergence řady funkcí v daném bodě $x \in I$ převádí problém na konvergenci klasické číselné řady $\sum f_n(x)$. Dle toho, jakým způsobem konvergence probíhá na celém intervalu I , rozlišujeme bodovou a stejnoměrnou konvergenci.

Definice 1.2 (Bodová konvergence).

- Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje bodově** k funkci f na intervalu I (píšeme $f_n \rightarrow f$ na I), jestliže pro každé $x \in I$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

tj. $\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

- Řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje bodově** k funkci $s(x)$ na I (píšeme $\sum f_n = s$ na I), jestliže posloupnost jejích částečných součtů $\{s_k(x)\}$ konverguje bodově k $s(x)$ na I .

U bodové konvergence může volba indexu n_0 záviset nejen na ε , ale i na konkrétním bodu x . Silnějším pojmem, který zaručuje zachování mnoha dobrých vlastností (jako je spojitost součtu), je stejnoměrná konvergence, kde n_0 závisí pouze na ε .

Definice 1.3 (Stejnoměrná konvergence).

- Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** k funkci f na intervalu I (píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na I), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

což je ekvivalentní podmínce $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|) = 0$.

- Řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** k součtu $s(x)$ na I (píšeme $\sum f_n \rightrightarrows s$ na I), jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_k(x)\}$ konverguje stejnoměrně k $s(x)$ na I .

1.2 Mocninné řady

Definice 1.4 (Mocninná řada, její střed, koeficienty, členy). Necht $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a x_0 je reálné číslo. Pak řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

se nazývá **mocninná řada**. Číslo x_0 nazýváme středem této mocninné řady, čísla a_n jejími koeficienty, výrazy $a_n(x - x_0)^n$ nazýváme členy mocninné řady.

2 Poloměr konvergence mocninných řad

Základní otázkou při práci s mocninnými řadami je, pro které hodnoty proměnné x daná řada konverguje. Množina všech takových x se nazývá **obor konvergence**.

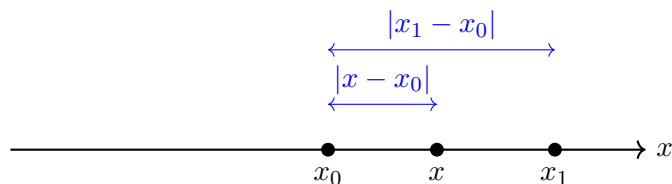
Ukazuje se, že obor konvergence mocninné řady má vždy symetrickou strukturu kolem svého středu. Tuto vlastnost formálně popisuje následující klíčová věta.

Věta 2.1 (O poloměru konvergence). *Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ existuje právě jedno číslo $R \in [0, \infty]$, nazývané **poloměr konvergence**, takové, že:*

- řada **absolutně konverguje** pro každé x , které splňuje $|x - x_0| < R$.
- řada **diverguje** pro každé x , které splňuje $|x - x_0| > R$.

V případech, kdy $|x - x_0| = R$ (tzv. krajní body intervalu konvergence), nelze o konvergenci obecně rozhodnout.

Klíčová myšlenka, na níž jsou postaveny následující důkazy, je založena na porovnávání velikosti členů řady. Intuitivně platí, že pokud mocninná řada konverguje v nějakém bodě x_1 , pak pro jakýkoliv bod x , který leží ke středu x_0 blíže než x_1 (tedy $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$), jsou členy $|a_n(x - x_0)^n|$ menší než členy $|a_n(x_1 - x_0)^n|$. Konvergence v bodě x_1 si vynucuje určitou „kontrolu“ nad velikostí koeficientů a_n , která je více než dostatečná pro zaručení (absolutní) konvergence v bližším bodě x . Naopak, pokud řada v nějakém bodě diverguje, pro všechny body, které jsou od středu ještě dál, budou členy řady v absolutní hodnotě jen narůstat, a proto tam řada také diverguje. Tímto způsobem vzniká interval konvergence.



Důkaz. Pro zjednodušení uvažujme řadu se středem v bodě $x_0 = 0$, tedy $\sum a_n x^n$. Zobecnění pro libovolné x_0 je triviální.

Definujme množinu M jako:

$$M = \{r \in [0, \infty) \mid \text{posloupnost } \{|a_n r^n|\}_{n=0}^{\infty} \text{ je omezená}\}$$

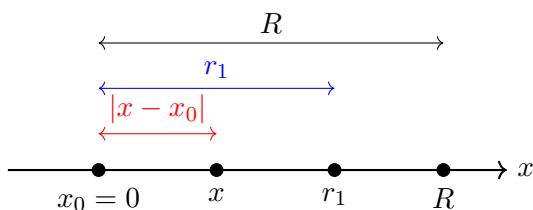
Množina M je zjevně neprázdná, protože vždy obsahuje 0. Nyní definujme poloměr konvergence R jako supremum této množiny:

$$R = \sup M$$

Musíme rozlišit dva případy. Pokud množina M není shora omezená, klademe $R = \infty$. Pokud je omezená, R je konečné nezáporné číslo. Nyní dokážeme, že takto definované R má vlastnosti uvedené ve větě.

1. Konvergence pro $|x| < R$

Zvolme libovolné x takové, že $|x| < R$. Protože $|x|$ je menší než supremum množiny M , musí existovat nějaké číslo $r_1 \in M$ takové, že $|x| < r_1 \leq R$.



Z definice množiny M víme, že jelikož $r_1 \in M$, posloupnost $\{|a_n r_1^n|\}$ je omezená. Existuje tedy konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna n platí:

$$|a_n r_1^n| \leq K$$

Nyní upravme obecný člen naší řady v bodě x :

$$|a_n x^n| = \left| a_n r_1^n \cdot \frac{x^n}{r_1^n} \right| = |a_n r_1^n| \cdot \left| \frac{x}{r_1} \right|^n \leq K \cdot \left| \frac{x}{r_1} \right|^n$$

Označme $q = \left| \frac{x}{r_1} \right|$. Jelikož jsme zvolili $|x| < r_1$, platí, že $0 \leq q < 1$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} K \cdot q^n$ je geometrická řada s kvocientem $q < 1$, a je tedy konvergentní. Protože pro všechna n platí $|a_n x^n| \leq K q^n$, řada $\sum a_n x^n$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

2. Divergence pro $|x| > R$

Zvolme libovolné x takové, že $|x| > R$. Označme $|x| = r$. Jelikož $r > R = \sup M$, číslo r nemůže ležet v množině M .

Podle definice množiny M to znamená, že posloupnost $\{|a_n r^n|\} = \{|a_n x^n|\}$ **není omezená**. Pokud ale posloupnost členů řady $\{a_n x^n\}$ není omezená, nemůže platit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$. Nebyla tedy splněna nutná podmínka konvergence řady. Z toho plyne, že řada $\sum a_n x^n$ diverguje.

Tím je existence a vlastnosti poloměru konvergence R dokázána. $\square$

2.1 Vzorec pro výpočet poloměru konvergence mocninné řady

Poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ lze určit pomocí koeficientů a_n použitím vzorce odvozeném v následující větě.

Věta 2.2 (Výpočet poloměru konvergence). *Pokud existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, pak poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ je roven této limitě. Tedy je dán vztahem:*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (1)$$

Důkaz. Odvození vzorce vychází z podílového (d'Alembertova) kritéria pro konvergenci číselných řad. Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Aplikací podílového kritéria na tuto řadu zkoumáme limitu:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right|$$

Tuto limitu můžeme upravit:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x - x_0|$$

Označme $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Potom $L(x) = L \cdot |x - x_0|$.

Podle podílového kritéria řada konverguje, pokud je $L(x) < 1$, a diverguje, pokud je $L(x) > 1$. V prvním případě dostáváme:

$$L \cdot |x - x_0| < 1 \implies |x - x_0| < \frac{1}{L}$$

Z tohoto vztahu vidíme, že řada konverguje pro všechna x v otevřeném intervalu (kruhu) se středem x_0 a poloměrem $R = \frac{1}{L}$. Naopak, pokud je $L(x) > 1$, řada diverguje, což odpovídá bodům, pro které platí $|x - x_0| > \frac{1}{L}$. Z věty o limitě podílu pak dostaneme $R = 1/L$.

Tím jsme odvodili vzorec pro poloměr konvergence R za předpokladu, že limita L existuje a platí $L \in (0, \infty)$. Rozmyslete si, že věta platí i v případech $L = 0$ a $L = \infty$. $\square$

2.2 Řešené příklady

Zde najde čtenář příklady na použití vzorce pro výpočet poloměru konvergence. Další řešené příklady na poloměr a obor konvergence najde čtenář v kapitole 6.2.

Příklad 2.3. Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Řešení:

1. Koeficienty jsou $a_n = 1$. Vypočteme limitu podle vzorce (1):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1.$$

Jedná se o geometrickou řadu, která konverguje právě na intervalu $(-1, 1)$.

2. Koeficienty jsou $a_n = \frac{1}{n!}$. Vypočteme limitu:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

3. Koeficienty jsou $a_n = n^n$. Limita podílu dává:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0.$$

Tato řada konverguje pouze ve svém středu $x = 0$.

3 Lokální stejnoměrná konvergence mocninných řad

Kromě bodové konvergence uvnitř intervalu konvergence mají mocninné řady i silnější vlastnost – konvergují zde lokálně stejnoměrně. To má zásadní důsledky, například to, že součet mocninné řady je na intervalu konvergence spojitá funkce.

Věta 3.1 (O lokálně stejnoměrné konvergenci). *Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ poloměr konvergence $R > 0$. Pak tato řada konverguje **lokálně stejnoměrně** na otevřeném intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. To znamená, že pro každý uzavřený podinterval $[c, d] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ řada na tomto podintervalu konverguje stejnoměrně.*

Důkaz. Mějme řadu $\sum a_n(x - x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$. Zvolme libovolný uzavřený interval $[c, d]$, který je celý obsažen v intervalu konvergence $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Definujme číslo ρ jako maximální vzdálenost bodů z intervalu $[c, d]$ od středu x_0 :

$$\rho = \max\{|c - x_0|, |d - x_0|\}$$

Protože interval $[c, d]$ je uzavřený a leží striktně uvnitř $(x_0 - R, x_0 + R)$, musí platit $\rho < R$.

Pro libovolné $x \in [c, d]$ platí nerovnost $|x - x_0| \leq \rho$. Můžeme tedy odhadnout velikost členů naší řady:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| |x - x_0|^n \leq |a_n| \rho^n$$

Tato nerovnost platí pro **všechna** $x \in [c, d]$.

Nyní uvažujme číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$. Jelikož $\rho < R$, z věty o poloměru konvergence víme, že mocninná řada $\sum a_n(x - x_0)^n$ v bodě $x = x_0 + \rho$ absolutně konverguje. To znamená, že číselná řada $\sum |a_n((x_0 + \rho) - x_0)^n| = \sum |a_n| \rho^n$ je konvergentní. Označme $M_n = |a_n| \rho^n$. Našli jsme tedy konvergentní číselnou řadu $\sum M_n$, která je majorantou k naší funkční řadě na intervalu $[c, d]$.

Připomeňme, že řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k součtu $s(x)$ na intervalu I , právě když posloupnost jejích částečných součtů $s_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k $s(x)$. To je ekvivalentní podmínce, že posloupnost zbytků po k -tém členu, definovaná jako rozdíl součtu a částečného součtu $R_k(x) = s(x) - s_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$, konverguje stejnoměrně k nule. Podmínka pro stejnoměrnou konvergenci je tedy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in I} |R_k(x)| \right) = 0$$

V našem případě je $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$. Pro zbytek $R_k(x)$ na intervalu $[c, d]$ můžeme provést následující odhad:

$$\sup_{x \in [c, d]} |R_k(x)| = \sup_{x \in [c, d]} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right| \leq \sup_{x \in [c, d]} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$$

První nerovnost v tomto odhadu je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti. Pro každý konečný součet platí $\left| \sum_{n=k+1}^N f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^N |f_n(x)|$. Limitním přechodem $N \rightarrow \infty$ se tato nerovnost přenesla i na nekonečné řady. Vlastnost suprema pak tuto nerovnost zachovává i po jeho aplikaci na obě strany.

V odhadu dále pokračujeme:

$$\sup_{x \in [c, d]} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| \rho^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n$$

Protože číselná řada $\sum M_n$ konverguje, její zbytek $\sum_{n=k+1}^{\infty} M_n$ musí jít k nule pro $k \rightarrow \infty$. Jelikož $\sup |R_k(x)|$ je nezáporné a shora omezené posloupností jdoucích k nule, musí jít také k nule (použijeme větu o sevřené posloupnosti). Tím je supremová podmínka splněna.

Tento postup, kdy nalezneme konvergentní číselnou majorantu a z ní odvodíme splnění supremové podmínky, je známý jako **Weierstrassův M-test**. Dokázali jsme tedy, že řada konverguje na intervalu $[c, d]$ stejnoměrně.

Jelikož jsme tento postup mohli provést pro libovolný uzavřený podinterval $[c, d]$ intervalu konvergence, dokázali jsme, že konvergence je na $(x_0 - R, x_0 + R)$ lokálně stejnoměrná. $\square$

4 Spojitost součtu mocninné řady

Významným důsledkem lokálně stejnoměrné konvergence mocninné řady je spojitost jejího součtu.

Věta 4.1 (O spojitosti součtu mocninné řady). *Nechť mocninná řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom její součet $f(x)$ je spojitá funkce na otevřeném intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

Důkaz. Mocniny $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ jsou jakožto polynomy spojitě funkce na celém $\mathbb{R}$.

Zvolme libovolný bod $x^* \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Vždy můžeme najít takový uzavřený podinterval $[c, d]$, který obsahuje x^* ve svém vnitřku a splňuje $[c, d] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ (např. zvolíme $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ pro $|x^* - x_0| < \rho < R$).

Podle věty o lokálně stejnoměrné konvergenci konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejnoměrně na intervalu $[c, d]$. Z věty z matematické analýzy o spojitosti součtu stejnoměrně konvergentní

řady spojitých funkcí plyne, že součtová funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $[c, d]$, a tedy i v bodě x^* .

Jelikož byl bod $x^* \in (x_0 - R, x_0 + R)$ zvolen libovolně, je funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$, což dokončuje důkaz. $\square$

5 Derivace a integrace mocninné řady člen po členu

Jednou z nejdůležitějších vlastností mocninných řad je možnost derivovat je a integrovat „člen po členu“, podobně jako polynomy. Stejněměrná konvergence zaručuje, že tyto operace jsou korektní a že výsledná řada má stejný poloměr konvergence.

5.1 Derivace mocninné řady člen po členu

Věta 5.1 (Derivace mocninné řady člen po členu). *Nechť mocninná řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom součet této řady je funkce, která má na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivace všech řádů. Její první derivaci $f'(x)$ získáme derivováním řady člen po členu:*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

Tato nová mocninná řada má stejný poloměr konvergence R .

5.2 Příklad: Výpočet součtu řady

Určete součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Řešení: Všimneme si, že koeficienty $a_n = n$ jsou podobné těm, které vznikají při derivování. Vyděme proto ze známé geometrické řady, jejíž součet umíme vyjádřit v explicitním tvaru.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Tento vztah platí pro $|x| < 1$, tedy poloměr konvergence této řady je $R = 1$.

Podle věty o derivaci řady člen po členu můžeme obě strany rovnice zderivovat.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Současně zderivujeme řadu člen po členu:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Dostali jsme tak rovnost:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{pro } |x| < 1$$

Naším cílem je však najít součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Tuto řadu získáme z předchozího výsledku vynásobením celé rovnice proměnnou x :

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Provedeme-li totéž na pravé straně rovnice, dostaneme hledaný součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Tento vztah platí na původním intervalu konvergence, tedy pro $x \in (-1, 1)$.

5.3 Integrace mocninné řady člen po členu

Věta 5.2 (Integrace mocninné řady člen po členu). *Nechť mocninná řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom funkce $f(x)$ má na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ primitivní funkci $F(x)$, kterou lze získat integrací řady člen po členu:*

$$F(x) = \int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Tato nová mocninná řada má stejný poloměr konvergence R . Pro určité integrály v intervalu konvergence pak pro všechna $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích: nejprve ověříme poloměr konvergence integrované řady a následně použijeme větu o derivaci člen po členu.

1. Uvažujme integrovanou mocninnou řadu $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$. Označme její koeficienty $b_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$. Předpokládejme existence limity pro $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$ (tady si důkaz zjednodušujeme; v případě, že limita neexistuje je třeba dokazovat jinak). Vypočítejme poloměr konvergence R' integrované řady:

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = R \cdot 1 = R.$$

Integrovaná řada má tedy přesně stejný poloměr konvergence R .

2. Jelikož $g(x)$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$, můžeme na ni použít předchozí větu o derivaci mocninné řady člen po členu na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$:

$$g'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (n+1)(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x).$$

Funkce $g(x)$ je tedy primitivní funkcí k $f(x)$ na $(x_0 - R, x_0 + R)$. Odtud dostáváme tvar pro neurčitý integrál $F(x) = g(x) + C$.

Pro určitý integrál podle Newtonovy–Leibnizovy formule platí:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = g(x) - g(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} - 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka 5.3. V kapitole 6.1 větu o integraci mocninné řady člen po členu použijeme k odvození Taylorových řad funkcí logaritmus a arkustangens.

6 Taylorovy řady

Pokud má daná funkce f derivace všech řádů, můžeme k ní přirozeným způsobem přiřadit mocninnou řadu, jejíž koeficienty závisí na hodnotách derivací f v jediném bodě.

Definice 6.1 (Taylorova řada). Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řadu

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

nazýváme **Taylorovou řadou** funkce f se středem v bodě x_0 .

Poznámka 6.2. Protože Taylorova řada je mocninná řada, vztahují se na ni všechna předchozí tvrzení: uvnitř svého intervalu konvergence konverguje lokálně stejnoměrně a lze ji derivovat i integrovat člen po členu.

Jako bezprostřední důsledek možnosti derivovat mocninnou řadu člen po členu dostáváme následující tvrzení, které popisuje jednoznačnost rozvoje funkce do mocninné řady.

Věta 6.3 (Taylorova řada součtu mocninné řady). *Nechť mocninná řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom tato mocninná řada je přímo Taylorovou řadou svého součtu $f(x)$ se středem v bodě x_0 . Platí tedy:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz. Víme, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivace všech řádů, které lze počítat postupně derivováním člen po členu:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots && \implies f(x_0) = a_0, \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots && \implies f'(x_0) = a_1, \\ f''(x) &= 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + \dots && \implies f''(x_0) = 2! a_2. \end{aligned}$$

Indukcí snadno nahlédneme, že pro k -tou derivaci v bodě x_0 platí $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$, z čehož okamžitě vyjádříme $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. $\square$

6.1 Příklady Taylorových řad

Nyní uvedeme základní Taylorovy řady (se středem $x_0 = 0$) pro elementární funkce a ukážeme si využití předchozích vět pro odvozování nových řad.

1. Základní funkce (e^x , $\sin x$, $\cos x$): Přímým výpočtem derivací v bodě $x_0 = 0$ dostáváme následující rozvoje, které konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

- **Exponenciální funkce:**¹

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

- **Funkce sinus:**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

- **Funkce kosinus:**

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

¹Ve větě 6.6 ukážeme rovnost exponenciální funkce a její Taylorovy řady, to samé ukážeme i pro sinus a kosinus. V kapitole 6.4 ukážeme příklad funkce, pro kterou tato rovnost neplatí.

2. Rozvoje odvozené z geometrické řady: Ze známého součtu geometrické řady platí pro $x \in (-1, 1)$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Podle věty o Taylorově řadě součtu mocninné řady je tato geometrická řada přímo Taylorovou řadou funkce $\frac{1}{1-x}$.

Substitucí $-x^2$ za x v tomto vztahu okamžitě získáme rozvoj funkce $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

3. Odvození rozvojů pro $\ln(1+x)$ a $\operatorname{arctg} x$ integrací člen po členu:

- **Přirozený logaritmus $\ln(1+x)$:** Víme, že pro $t \in (-1, 1)$ platí:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

Integrujeme-li tuto řadu člen po členu na intervalu $[0, x]$ pro $|x| < 1$, získáme rozvoj:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

Přeindexováním $k = n+1$ dostaneme známý vzorec:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

- **Arkustangens $\operatorname{arctg} x$:** Aplikujeme-li stejný postup integrace člen po členu na rozvoj funkce $\frac{1}{1+t^2}$ pro $|x| < 1$, dostaneme:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Výsledný rozvoj je:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

6.2 Výpočet poloměrů a oborů konvergence odvozených Taylorových řad

V této části spočítáme poloměry konvergence R , prozkoumáme chování řad v krajních bodech intervalů a určíme celkový **obor konvergence** pro všechny výše odvozené Taylorovy řady.

K výpočtu poloměru použijeme buď odvozený vzorec $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, nebo v případě řad s vynechanými mocninami aplikujeme přímo d'Alembertovo podílové kritérium na členy řady. V případě geometrických řad použijeme nutnou a postačující podmínku pro její konvergenci: kvocient geometrické řady je $q \in (-1, 1)$.

1. Exponenciální funkce $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- **Poloměr konvergence:** Pro koeficienty $a_n = \frac{1}{n!}$ platí:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

- **Obor konvergence:** Jelikož $R = \infty$, řada nemá žádné krajní body a konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Obor konvergence je $\mathbb{R}$.

2. Funkce $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

- **Obor konvergence:** Řada je geometrická s kvocientem $q = x$, proto je její obor konvergence interval $(-1, 1)$.
- **Poloměr konvergence:** Z oboru konvergence pak plyne hodnota poloměru konvergence $R = 1$.

3. Funkce $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

- **Poloměr konvergence:** Koeficienty jsou $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Platí:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

- **Krajní body:**

- Pro $x = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, což je alternující harmonická řada. Jelikož posloupnost $\frac{1}{n}$ klesá k nule, podle Leibnizova kritéria tato řada konverguje (neabsolutně).
- Pro $x = -1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, což je záporně vzatá harmonická řada, která diverguje k $-\infty$.

- **Obor konvergence:** Polouzavřený interval $(-1, 1]$.

Poznámka 6.4 (Poloměr konvergence a definiční obor pro $\ln(1+x)$). Definičním oborem funkce $f(x) = \ln(1+x)$ je interval $(-1, \infty)$. V všimněme si, že pro $x \rightarrow -1^+$ platí $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$. Funkce má tedy v bodě $x = -1$ singulární bod (svislou asymptotu) a není v jeho okolí omezená. Vzhledem k této nespojitosti a neomezenosti je omezení poloměru konvergence na $R = 1$ (který nedovolí konvergenci nalevo od bodu $x = -1$) zcela přirozené a očekávatelné.

4. Funkce sinus $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

- **Poloměr konvergence:** Aplikujeme d'Alembertovo kritérium na člen $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Protože $L(x) = 0 < 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, řada konverguje pro všechna reálná čísla, a tedy $R = \infty$.

- **Obor konvergence:** Množina $\mathbb{R}$.

5. Funkce kosinus $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

- **Poloměr konvergence:** Aplikujeme d'Alembertovo kritérium na člen $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Jelikož $L(x) = 0 < 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je $R = \infty$.

- **Obor konvergence:** Množina $\mathbb{R}$.

6. Funkce $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

- **Obor konvergence:** Řada je geometrická s kvocientem $q = -x^2$. Z podmínky $|-x^2| < 1$ dostaneme obor konvergence řady $(-1, 1)$.
- **Poloměr konvergence:** Z oboru konvergence pak plyne hodnota poloměru konvergence $R = 1$.

7. Funkce arkustangens $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

- **Poloměr konvergence:** Aplikujeme d'Alembertovo kritérium na člen $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2 = |x|^2.$$

Podmínka $L(x) < 1$ znamená $|x| < 1$, tedy poloměr konvergence je $R = 1$.

- **Krajní body:**

- Pro $x = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, která podle Leibnizova kritéria konverguje (neabsolutně).
- Pro $x = -1$ dostáváme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, která ze stejného důvodu konverguje (neabsolutně).

- **Obor konvergence:** Uzavřený interval $[-1, 1]$.

Poznámka 6.5 (Poloměr konvergence a definiční obor pro $\operatorname{arctg} x$). Na rozdíl od funkce $\ln(1+x)$ je funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ definovaná, hladká a omezená na celém reálném oboru ($D(f) = \mathbb{R}$). Přesto je poloměr konvergence její Taylorovy řady pouze $R = 1$ a řada konverguje výhradně na intervalu $[-1, 1]$.

Tento na první pohled překvapivý jev ukazuje podstatnou vlastnost mocninných řad: o poloměru konvergence nerozhoduje jen chování funkce na reálné ose, ale její chování v komplexním oboru. Derivace funkce $\operatorname{arctg} x$, což je funkce $\frac{1}{1+x^2}$, má v komplexní rovině póly v bodech $x = \pm i$. Vzdálenost těchto singulárních bodů od středu rozvoje $x_0 = 0$ je rovna $|\pm i| = 1$, což nastavuje strop pro poloměr konvergence reálné mocninné řady na $R = 1$.

6.3 Analytické funkce a jejich vlastnosti

Definice analytické funkce Funkce $f(x)$ definovaná na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá **analytická v bodě** $x_0 \in D$, pokud ji lze v nějakém otevřeném okolí bodu x_0 vyjádřit jako součet konvergentní mocninné řady:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (2)$$

kde koeficienty a_n odpovídají Taylorovu rozvoji funkce v bodě x_0 :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (3)$$

Funkce se nazývá **analytická na množině** D , je-li analytická v každém bodě této množiny.

Chování v okolí bodu. Bez důkazu uvedeme následující vlastnosti analytických funkcí:

- V okolí bodu x_0 , označeném jako $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$, konverguje posloupnost Taylorových polynomů $T_n(x)$ lokálně stejnoměrně k funkci $f(x)$.
- Funkce má v bodě x_0 i v celém okolí $U_\delta(x_0)$ derivace všech řádů (je třídy C^∞).
- Hodnoty funkce na libovolně malém okolí $U_\delta(x_0)$ jednoznačně určují celou funkci na jejím definičním oboru (princip jednoznačnosti).
- Hodnoty funkce na libovolně malém okolí $U_\delta(x_0)$ jednoznačně určují tuto funkci na celé souvislé komponentě jejího definičního oboru, která obsahuje bod x_0 (princip jednoznačnosti). Je-li definiční obor D souvislá množina (např. interval), určují ji jednoznačně na celém D .

Věta 6.6 (Analytičnost exponenciály, sinu a kosinu). *Funkce e^x , $\sin x$ a $\cos x$ jsou analytické v bodě $x_0 = 0$.² Pro každé $x \in \mathbb{R}$ jsou tyto funkce rovny svým Taylorovým řadám se středem v bodě $x_0 = 0$:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Důkaz. Hlavní myšlenka důkazu je založena na odhadu zbytku v Taylorově vzorci v Lagrangeově tvaru. Chceme ukázat, že zbytek $R_N(x)$ po N -tém členu konverguje k nule pro $N \rightarrow \infty$ na libovolném omezeném intervalu $[-r, r]$ pro $r > 0$.

Lagrangeův tvar zbytku je dán vztahem:

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1},$$

kde ξ je číslo ležící mezi 0 a x .

- Pro $f(x) = e^x$ jsou všechny derivace tvaru $f^{(N+1)}(x) = e^x$. Na intervalu $[-r, r]$ jsou tedy derivace v bodě ξ shora omezeny konstantou $M = e^r$.
- Pro $f(x) = \sin x$ a $f(x) = \cos x$ jsou všechny derivace rovny $\pm \sin x$ nebo $\pm \cos x$, tudíž jsou na celém $\mathbb{R}$ shora omezeny konstantou $M = 1$.

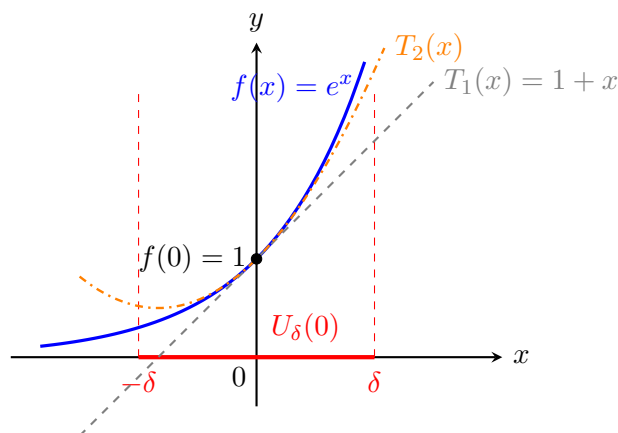
Pro libovolné $x \in [-r, r]$ dostáváme odhad:

$$|R_N(x)| \leq \frac{M}{(N+1)!} |x|^{N+1} \leq \frac{M \cdot r^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Jelikož z vlastností řady pro exponenciálu víme, že $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^{N+1}}{(N+1)!} = 0$ pro jakékoliv pevné $r > 0$, platí podle věty o dva strážnících:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in [-r, r].$$

Protože tento závěr platí pro libovolně velké $r > 0$, Taylorova řada se středem v $x_0 = 0$ konverguje k původní funkci na celém $\mathbb{R}$. $\square$



Obrázek 1: Analytická funkce $f(x) = e^x$ v okolí bodu 0 s aproximací Taylorovými polynomy $T_1(x)$ a $T_2(x)$.

Příklad. Na obrázku 1 je znázorněna analytická funkce $f(x) = e^x$ na okolí $U_\delta(0)$ spolu se svými prvním a druhým Taylorovým polynomem $T_1(x) = 1 + x$ a $T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, které ukazují, jak mocninná řada v blízkosti nuly aproximuje původní funkci.

Příklad 6.7. Určete Taylorovu řadu funkce $f(x) = \cos(x^3)$ se středem v bodě $x_0 = 0$. Pomocí této řady spočítejte hodnoty derivací $f^{(5)}(0)$ a $f^{(6)}(0)$.

Řešení příkladu 6.7: Podle věty o analytičnosti funkce kosinus v bodě 0 je funkce $\cos t$ rovna své Taylorově řadě na celém $\mathbb{R}$, tj. pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}.$$

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ zvolíme $t = x^3$. Protože $x^3 \in \mathbb{R}$, můžeme x^3 dosadit za t do výše uvedené řady a získáváme vyjádření funkce $f(x) = \cos(x^3)$ ve tvaru mocninné řady:

$$f(x) = \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^3)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n} = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \dots$$

Tato mocninná řada má střed $x_0 = 0$ a konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (její poloměr konvergence je $R = \infty$).

Podle věty o Taylorově řadě součtu mocninné řady je každá mocninná řada s kladným poloměrem konvergence přímo Taylorovou řadou svého součtu. Získaná mocninná řada je tedy přímo hledanou Taylorovou řadou funkce $f(x) = \cos(x^3)$ se středem v bodě $x_0 = 0$.

Pro koeficienty a_k Taylorovy řady $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ platí obecný vzorec:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \implies f^{(k)}(0) = k! a_k.$$

Porovnáním koeficientů získané mocninné řady u jednotlivých mocnin x^k vypočítáme požadované derivace:

- **Pátá derivace $f^{(5)}(0)$:** Člen x^5 se v rozvoji nevyskytuje (koeficient $a_5 = 0$), protože řada obsahuje pouze mocniny x^{6n} . Odtud dostáváme:

$$f^{(5)}(0) = 5! \cdot a_5 = 5! \cdot 0 = 0.$$

²Ve skutečnosti jsou analytické na celém $\mathbb{R}$, my to ale nebudeme potřebovat ani dokazovat.

- **Šestá derivace** $f^{(6)}(0)$: Člen u x^6 odpovídá volbě $n = 1$ v sumě $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n}$. Jeho koeficient je $a_6 = \frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1)!} = -\frac{1}{2}$. Vypočteme:

$$f^{(6)}(0) = 6! \cdot a_6 = 720 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -360.$$

6.4 Příklad funkce, která není analytická

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Tato funkce je klasickým příkladem hladké funkce (funkce třídy C^∞), která není analytická v bodě $x = 0$.

Výpočet první derivace v bodě $x = 0$

První derivaci v bodě $x = 0$ spočítáme přímo z definice derivace jako limitu podílu diferencí:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Pro výpočet jednostranné limity zprava ($x \rightarrow 0^+$) použijeme substituci $t = \frac{1}{x}$. Když $x \rightarrow 0^+$, pak $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

Analogicky pro limitu zleva ($x \rightarrow 0^-$) při substituci $t = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ dostáváme:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

Obě jednostranné limity se rovnají 0, z čehož plyne:

$$f'(0) = 0.$$

Vyšší derivace a Taylorova řada

Lze ukázat, že všechny vyšší derivace funkce f v bodě $x = 0$ jsou rovněž nulové, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Taylorova řada funkce f se středem v bodě $x_0 = 0$ má tedy tvar:

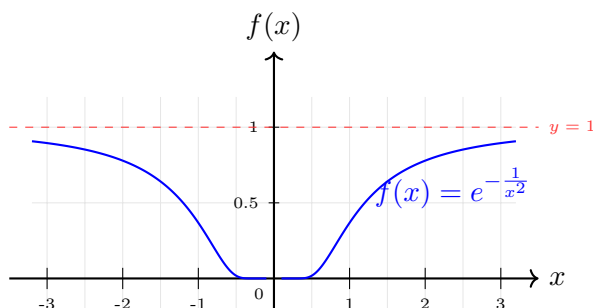
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0.$$

Součet této Taylorovy řady je konstantně roven 0 pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Neanalytičnost funkce

Protože je součet Taylorovy řady funkce f roven 0 pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale samotná funkce je mimo bod nula kladná, nerovná se funkce na žádném okolí bodu nula své Taylorově řadě. Proto není funkce analytická v bodě nula.

Na grafu níže je vidět, že hodnoty funkce f jsou v prstencovém okolí bodu nula velmi malé, nerozeznatelné od nulových hodnot.



Rozdíl mezi součtem mocninné řady a Taylorovou řadou

Tento příklad ilustruje podstatný rozdíl mezi vlastnostmi mocninných řad a Taylorových řad obecných funkcí:

- ****Mocninná řada jako primární objekt:**** Je-li funkce $g(x)$ přímo definována jako součet mocninné řady $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s kladným poloměrem konvergence $R > 0$, je tato funkce uvnitř intervalu konvergence $(x_0 - R, x_0 + R)$ analytická. Její vlastní Taylorova řada v bodě x_0 splývá s původní mocninnou řadou a její součet se funkcí $g(x)$ striktně rovná.
- ****Taylorova řada zadané hladké funkce:**** Pro libovolnou nekonečně krát diferencovatelnou funkci f můžeme formálně sestavit její Taylorovu řadu. Skutečnost, že tato řada konverguje, však ****nezaručuje****, že se její součet rovná původní funkci $f(x)$ na jakémkoliv okolí bodu x_0 .

V našem případě konverguje Taylorova řada $T(x) = 0$ na celém $\mathbb{R}$ (poloměr konvergence $R = \infty$), avšak rovnost $f(x) = T(x)$ nastává výhradně pro $x = 0$. Pro libovolné $x \neq 0$ platí $f(x) = e^{-1/x^2} > 0$, zatímco $T(x) = 0$. Funkce f tedy není rovna součtu své Taylorovy řady na žádném okolí počátku.