

Úlohy k písemné části zkoušky z PAN3/KAN3
17. září 2026

- 1a Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}, \quad I = \mathbb{R}$$

1b

$$f_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}, \quad I = \mathbb{R}$$

1c

$$f_n(x) = x + \exp(-nx), \quad I = (1, +\infty)$$

1d

$$f_n(x) = x + \exp(-nx), \quad I = (0, +\infty)$$

1e

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)}, \quad I = \mathbb{R}$$

1f

$$f_n(x) = \sin^n(x), \quad I = (0, 2\pi)$$

1g

$$f_n(x) = 2 \sin^n(x), \quad I = (0, \pi/3)$$

1h

$$f_n(x) = 2 - \sin^n(x), \quad I = (-\pi/2, \pi/2)$$

1i

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad I = (0, +\infty)$$

1j

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad I = (1, +\infty)$$

1k

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n), \quad I = (0, +\infty)$$

1l

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \quad I = (-1, 1)$$

1m

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}, \quad I = (1, 2)$$

1n

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad I = [0, 1]$$

2. Je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^\infty$, bod x_0 a interval I .

(a) Vypočtete dvojnásobné limity

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right), \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

(b) Rozhodněte, zda platí $L_1 = L_2$. Na základě tohoto výsledku (s odkazem na příslušnou větu z přednášky) rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti (f_n) na daném jednostranném/oboustranném okolí bodu x_0 .

(c) Vypočtete bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

2a

$$f_n(x) = x^n, \quad I = (0, 1], \quad x_0 = 1, x \rightarrow 1^-$$

2b

$$f_n(x) = \exp(-nx^2), \quad I = \mathbb{R}, \quad x \rightarrow 0$$

2c

$$f_n(x) = \arctg(nx), \quad I = [0, \infty), \quad x_0 = 0, x \rightarrow 0^+$$

2d

$$f_n(x) = \arctg(nx), \quad I = (-\infty, 0], \quad x_0 = 0, x \rightarrow 0^-$$

2e

$$f_n(x) = \sin^n(x), \quad I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

2f

$$f_n(x) = 2 + \exp(-nx), \quad I = [0, +\infty), \quad x_0 = 0, x \rightarrow 0^+$$

3a Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

3b

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k2^k}$$

3c

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5x^k}{k^2 3^k}$$

3d

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

3e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3f*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$$

3g*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

4a Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady. Pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která diverguje?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

4b

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$$

4c

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

4d

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$$

4e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n + 4^n}$$

4f

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + n^2 + n^3 + n^4}$$

4g

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Vypočtete Taylorovu řadu se středem v bodě x_0 funkce f a určete její poloměr konvergence. Taylorovu řadu použijte k výpočtu derivace funkce f v bodě x_0 řádu n .

5a

$$f(x) = \sin(x^2), \quad x_0 = 0, \quad n = 6$$

5b

$$f(x) = \exp(3x), \quad x_0 = 0, \quad n = 4$$

5c

$$f(x) = \log(1 + x^2), \quad x_0 = 0, \quad n = 4$$

5d

$$f(x) = \log(1 + 2x), \quad x_0 = 0, \quad n = 3$$

5e

$$f(x) = \frac{2}{3 - x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 5$$

5f

$$f(x) = \frac{1}{2 + x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 5$$

5g

$$f(x) = \operatorname{arctg}(3x), \quad x_0 = 0, \quad n = 3$$