Písemná část zkoušky z předmětu AN3E/FVP
7. března 2016

Jméno a příjmení:

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Ukažte, že funkci f je možné spojitě rozšířit do bodu $O = (0, 0)$, že toto rozšíření má v bodě O silnou derivaci a tuto silnou derivaci vypočtěte.

$$f : (x, y) \mapsto \left(\frac{x^3}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{x^4 y^2}{3x^4 + 4y^2}, \operatorname{arctg}(xy) \right)$$

2. Zdůvodněte, že funkce $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ nabývá na obdélníku $O = [0, 1] \times [0, 2]$ maxima a minima a nalezněte body, ve kterých je nabývá. Nalezené body spolu s obdélníkem O zakreslete, rozmyslete si a uveďte, jak je možné vyřešit úlohu geometricky.

3. Metodou Lagrangeových multiplikátorů nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M. Nalezené body spolu s množinou M zakreslete, rozmyslete si a uveďte, jak je možné vyřešit úlohu geometricky.

$$f : (x, y) \mapsto (2x + y)^2, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}.$$

4. Načrtněte těleso T a odhadněte jeho objem a polohu těžiště.

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 4 - x^2 - y^2]\}$$

Poté vypočtěte objem V a integrál

$$S = \int_T z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

a vypočtěte polohu těžiště $(0, 0, S/V)$.